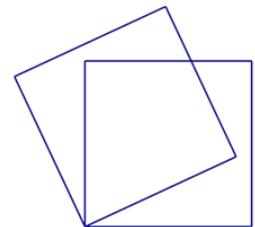


國立竹北高中 112 學年度 第 1 次教師甄選
數學科 試題卷

一、填充題：(每格 6 分，共 60 分)

1. 今有 1~10 十個數，任取 3 個相異數，最大和最小差距大於 5 的機率為_____。
2. 複數平面上，同時滿足 $|z-i|=|z|$ 與 $|z-1|+|z|=\sqrt{2}$ 的解有_____個。
3. 高鐵一共有 15 節車廂，若要選擇其中 3 節設置行動裝置的充電器，但這 3 節車廂任兩節車廂至少須間隔 2 個車廂（含 2 個），則共有_____種選擇方法。
4. 一邊長為 1 的正方形 Γ_1 ，逆時針旋轉 θ 得正方形 Γ_2 ，若兩正方形重疊部分的面積為 $\frac{2}{3}$ ，則 $\tan \theta =$ _____。



5. 已知 x, y, z 滿足聯立方程式：
$$\begin{cases} \log_4 x + \log_8 (yz) = 2 \\ \log_4 y + \log_8 (xz) = 4 \\ \log_4 z + \log_8 (xy) = 5 \end{cases}$$
，且 $xyz = 2^k$ ，則 $k =$ _____。

6. 已知 a, b 皆為正實數，且 $a+b=k$ ，則 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$ 的最小值為_____。(答案請以 k 表示)

7. x^{100} 除以 x^3+x^2+x 的餘式為_____。

8. 已知 $P(8,0)$ 是圓 $C: x^2+y^2=144$ 內部一點， A 、 B 分別為圓上的點，
且滿足 $\angle APB=90^\circ$ ，試求所有 \overline{AB} 中點 M 所形成的軌跡圖形所滿足的方程式為_____。

9. 空間中有一平面 E 及兩不在平面 E 上的固定點 A 、 B ，其中 \overline{AB} 長為 10，
 \overline{AB} 與平面 E 平行且距離為 6。設平面 E 上有一單位圓，其上有兩動點 P 、 Q ，
則四面體 $ABPQ$ 的最大體積為_____。

10. 已知方程式 $3\left||x-\sqrt{3}y|-8\right|+2\left||\sqrt{3}x+y|-18\right|=72$ 在平面上定義了一個由若干線段所構成的
封閉曲線 Γ ，以原點為中心，將 Γ 逆時針旋轉 60° 可得封閉曲線 Γ' ，
則封閉曲線 Γ' 所包圍的面積為_____。

二、計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

1. Sketch the graph of $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ 。

2. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ ， $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$ 。

另一直線 L_3 與 L_1 、 L_2 皆相交且垂直。

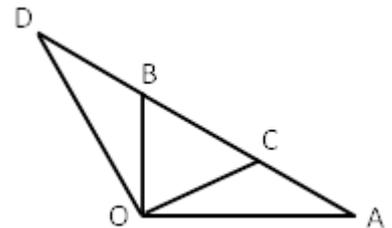
若 P 、 Q 兩點分別在 L_1 、 L_2 上且與 L_3 之距離分別為 $4\sqrt{3}$ 及 $5\sqrt{2}$ ，則 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 請利用高中數學內容中兩種不同的方法解下列題目：

設 O 、 A 、 B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 \overrightarrow{OA} 垂直 \overrightarrow{OB} 。
若 C 、 D 兩點在直線 AB 上，

滿足 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，且 \overrightarrow{OC} 垂直 \overrightarrow{OD} ，

則 $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)



4. 請說明選修數甲課程中，「牛頓法求根」要如何選取初始值，才能保證所得到的數列會收斂到欲求的根。

～～試題結束，祝福考生一切順利～～

【試題答案】

第一部分 填充題 (每格 6 分，共 60 分)

1	2
$\frac{1}{2}$	1
3	4
165	$\frac{5}{12}$
5	6
$\frac{66}{7}$	$2\sqrt{k^2+1}-2$
7	8
x	$x^2 + y^2 - 8x - 40 = 0$
9	10
20	1140