

Transformadas de Hilbert- Huang

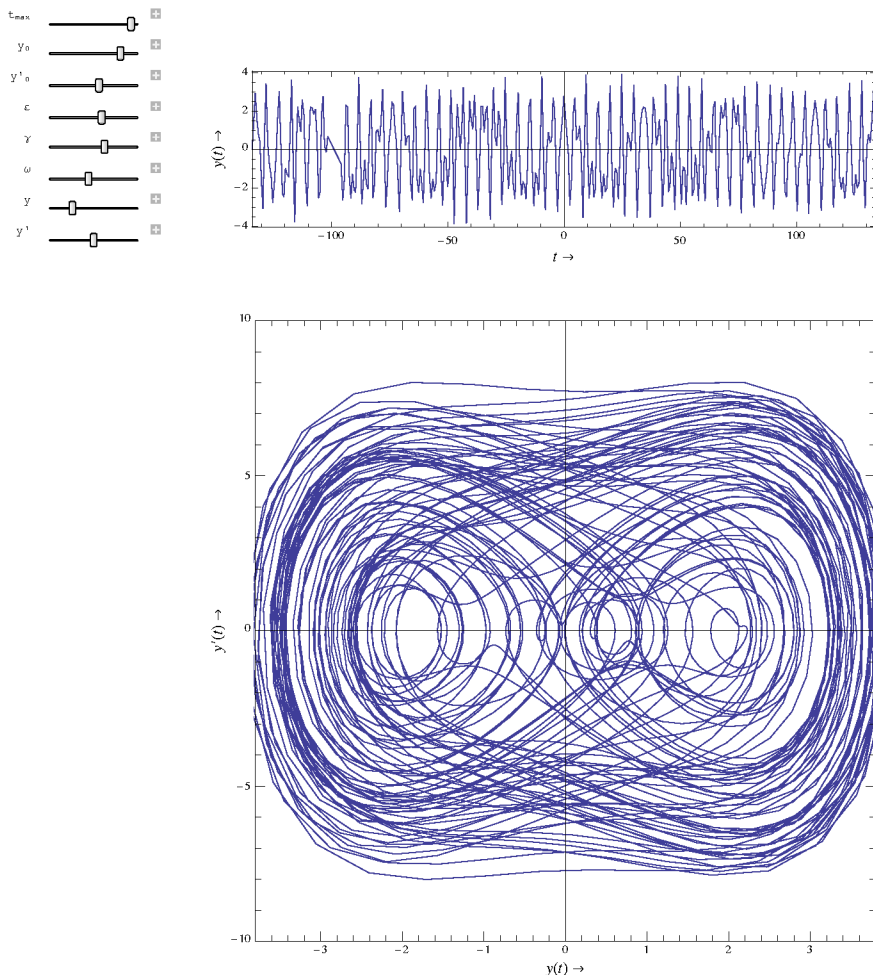
- **Objectivos:** Análise de dados provenientes de processos não-lineares, não-estacionários e/ou estocásticos.
- **Hipótese:** A utilização de bases adaptativas é necessária na análise deste tipo de sinais.

- Problemas Matemáticos em aberto

- ◇ Como definir as bases adaptativas a-posteriori?
- ◇ Quais as propriedades matemáticas destas bases?
- ◇ Para processos não-lineares, para além da periodicidade torna-se necessário determinar a dinâmica do processo a partir dos dados experimentais. Uma característica típica de processos não lineares é a existência de modulação entre frequências que aparece como mudanças súbitas de frequência dentro de um período de oscilação.

- Exemplo de sinal não linear: na equação de Duffing não-dissipativa forçada o termo $(1 + \varepsilon y(t))$ representa uma constante elástica variável por exemplo. O comportamento do sinal é complexo e a sua regularidade depende de forma não linear dos parâmetros e condições iniciais.

$$y''(t) + y(t)(1 + \varepsilon y(t)^2) = \gamma \cos(\omega t) \quad (420)$$



- **A transformada de Hilbert-Huang é feita de duas partes:**

- Decomposição Empírica em Modos (EMD=Empirical Mode Decomposition)

- ◇ Assume que o sinal é composto por modos intrínsecos de oscilação, linear ou não linear.
 - ◇ Cada modo de oscilação terá um número de zeros igual ao número de máximos (ou mais ou menos um) .
 - ◇ Cada modo de oscilação deve ser simétrico relativamente a uma média local aproximadamente zero.
- Uma componente do sinal que verifique as condições acima define uma função de modo intrínseco (IMF). Esta função poderá ter amplitude e frequência variável.

- Para determinar uma IMF a partir dum sinal $f_1(t)$ determinam-se os envelopes $\{f_{1_{max}}(t), f_{1_{min}}(t)\}$ de máximos e mínimos do sinal, por exemplo usando splines cúbicas com nodos nos extremos. A diferença entre o sinal e a média dos envelopes $m_{1,1}(t) = \frac{1}{2}(f_{1_{max}}(t) + f_{1_{min}}(t))$ determina uma primeira aproximação $h_{1,1}(t)$ da IMF

$$h_{1,1} = f_1(t) - m_{1,1}(t) \quad (421)$$

- A primeira aproximação $h_{1,1}$ deve ser mais simétrica que e o sinal original f_1 .

- Repita-se este processo com a função $h_{1,1}(t)$ com $m_{1,1} = \frac{1}{2}(h_{1,1_{max}}(t) + h_{1,1_{min}}(t))$ para obter uma segunda aproximação, e sucessivamente obtém-se

$$h_{1,k}(t) = h_{1,k-1}(t) - m_{1,k}(t) \quad (422)$$

- Este processo pára quando $m_{1,k}(t) \approx 0$ dentro duma aproximação pré-definida. A função final $h_{1,k}(t)$ será uma IMF

$$c_1(t) = h_{1,k}(t) \quad (423)$$

- A diferença entre o sinal original e esta IMF pode agora ser tratada de forma idêntica

$$f_2(t) = f_1(t) - c_1(t) \quad (424)$$

$$h_2(t) = f_2(t) - m_2(t) \quad (425)$$

onde $m_2(t) = \frac{1}{2}(f_{2_{max}}(t) + f_{2_{min}}(t))$, e repetindo até $m_{2,k}(t) \approx 0$ obtém-se uma segunda IMF

$$c_2(t) = h_{2,k}(t) = h_{2,k-1}(t) - m_{2,k}(t) \quad (426)$$

- Finalmente quando a função restante $f_n(t) = f_{n-1}(t) - c_{n-1}(t)$ for aproximadamente constante ou nula podemos compor o sinal original de forma que

$$f_1(t) = f_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t) \quad (427)$$

• **Exemplo ("Hilbert-Huang Transform and its applications", N.E. Huang, S.P. Shen):**

- Variações da duração dum dia em *ms* com a ocorrência de fenómenos atmosféricos e geofísicos devido

à conservação de momento angular terrestre.

- ◇ Nesta imagem o método de Hilbert-Huang revela os modos intrínsecos c_1 a c_{12} no intervalo de tempo 1960 – 2001. Os modos intrínsecos conseguem claramente mostrar oscilações de periodicidade cada vez mais longa.
- ◇ Note-se o modo intrínseco $c_8(t)$ que corresponde a oscilações aproximadamente anuais. Na figura seguinte os máximos do envelope correspondem a anos particularmente activos do "El Niño".

• **Análise Espectral Hilbertiana (HSA=Hilbert Space Analysis)**

- A extensão analítica $\mathcal{C}_i(s) = c_i(s) - i\mathcal{H}_s(c_i)$ usando a transformada de Hilbert de cada IMF $c_i(t)$

$$\mathcal{H}_s(c_i) = \mathcal{P}\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_i(t) \frac{1}{s-t} dt\right] \quad (428)$$

determina para cada modo intrínseco uma representação em termos de uma amplitude e uma frequência variáveis

$$\mathcal{C}_i(s) = a_i(s) e^{i\theta_i(s)} \quad (429)$$

onde a fase $\theta_i(s)$ pode ser relacionada com a frequência instantânea $\omega_i(s) = \frac{d\theta_i}{ds}$

$$\theta_i(s) = \int_0^s \omega_i(t) dt \quad (430)$$

- Assim se pode recuperar uma representação de $f_1(t)$ através de

$$f_1(t) = f_n(t) + \mathcal{R}e\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}_i(t)\right) \quad (431)$$

$$f_1(t) = f_n(t) + \mathcal{R}e\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) e^{i\theta_i(t)}\right)$$

- O espectro de Amplitude de Hilbert

- ◇ A associação de uma frequência instantânea $\omega_i(t)$ a cada instante t com uma determinada amplitude $a_i(t)$ permite construir um espectro $H_i(t, \omega)$ para cada modo, ou um espectro acumulado $H(\omega, t)$ para todos os modos intrínsecos.

- Construção de Bancos de Filtros para o Algoritmo EMD

Aplicações de Onduletas

■ Aplicações em Equações diferenciais

● **Derivadas de onduletas e funções de escala: Coeficientes de Conexão**

- Dada uma representação de uma função $f(t)$ num sistema de onduletas $\{\phi, \psi\}$ a sua representação em termos duma série pode ser escrita

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{L,k} \phi_{L,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=L}^{\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{432}$$

$$s_{n,k} = \langle \phi_{n,k}, f \rangle \quad ; \quad w_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle$$

- A sua derivada deverá ser

$$f'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s'_{L,k} \phi'_{L,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=L}^{\infty} w'_{j,k} \psi'_{j,k}(t) \tag{433}$$

- A expansão das derivadas de funções de escala, onduletas e suas dilatações e translações determina os Coeficientes de Conexão

$$\phi'_{L,k}(t) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \Gamma_k^{k'} \phi_{L,k'}(t) + \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \sum_{j=L}^{\infty} \Gamma_k^{j,k'} \psi_{j,k'}(t) \tag{434}$$

$$\psi'_{j,k}(t) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \Gamma_{j,k}^{k'} \phi_{L,k'}(t) + \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \sum_{j'=L}^{\infty} \Gamma_{j,k}^{j',k'} \psi_{j',k'}(t)$$

- Os coeficientes de conexão são unicamente determinados por

$$\begin{cases} \Gamma_k^{k'} &= \langle \phi_{L,k'}, \phi'_{L,k} \rangle \\ \Gamma_{j,k}^{k'} &= \langle \phi_{L,k'}, \psi'_{j,k} \rangle \\ \Gamma_k^{j,k'} &= \langle \psi_{j,k'}, \phi'_{L,k} \rangle \\ \Gamma_{j,k}^{j',k'} &= \langle \psi_{j',k'}, \psi'_{j,k} \rangle \end{cases} \tag{435}$$

- Propriedades

$$\begin{cases} \Gamma_k^{k'} &= -\Gamma_{k'}^k \\ \Gamma_{j,k}^{k'} &= -\Gamma_{k'}^{j,k} \\ \Gamma_{j,k}^{j',k'} &= -\Gamma_{j',k'}^{j,k} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_k^{k'} &= \Gamma_0^{k'-k} = -\Gamma_0^{k-k'} \\ \Gamma_k^{j,k'} &= \Gamma_0^{j,k'-2^j k} \\ \Gamma_{j,k}^{k'} &= \Gamma_{j,k-2^j k}^{k'} \\ \Gamma_{j,k}^{j',k'} &= 2^j \Gamma_{0,0}^{j'-j,k'-2^{j-j} k} \end{cases} \tag{436}$$

- As seguintes relações mostram que todos os coeficientes podem ser determinados a partir do conhecimento de Γ_0^k :

$$\begin{cases} \Gamma_0^{0,k} = \sum_{k',k'' \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_k \mathbf{g}_{k'} \Gamma_k^{2k+k''} \\ \Gamma_0^{j,k} = \sqrt{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_{k'} \Gamma_{k'}^{j-1,k} \\ \Gamma_{0,0}^{j,k} = \sqrt{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_{k'} \Gamma_{k'}^{j-1,k} \end{cases} \quad (437)$$

- A partir das autocorrelações $C_n(\mathbf{h}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_k \mathbf{h}_{k+n}$ tem-se as fórmulas de recorrência

$$\begin{aligned} \Gamma_0^n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{k-2n}(\mathbf{h}) \Gamma_0^k \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \Gamma_0^k &= -1 \end{aligned} \quad (438)$$

- Para um sistema de suporte compacto estas equações são suficientes para definir unívocamente os coeficientes de conexão

• Exemplo Haar

$$\Gamma_0^0 = 0 \quad ; \quad \Gamma_0^1 = \frac{1}{2} \quad (439)$$

• Exemplo Daubechies D_2

$$\Gamma_0^0 = 0 \quad ; \quad \Gamma_0^1 = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \Gamma_0^2 = \frac{1}{12} \quad (440)$$

- Métodos de Galerkin-Onduleta para equações diferenciais

• Métodos Residuais Pesados

- A solução numérica de equações diferenciais $\mathcal{F}(t, \vec{r}, u, u_t, \nabla u, \dots) = 0$ por este método consiste em procurar uma solução em termos de combinações lineares de uma família de funções $\{g_i(t, \vec{r})\}_{i \in \mathbb{J}}$

$$u_p(t, \vec{r}) = \sum_i c_i(t) g_i(t, \vec{r}) \quad (441)$$

- A substituição da forma proposta da solução $u_p(t, \vec{r})$ na equação diferencial converte em geral as EDOs num conjunto de equações algébricas, e as EDPs num conjunto de EDOs para a determinação dos coeficientes $c_k(t)$.

- Esta conversão decorre de escolher um conjunto de funcionais $\{\psi_j(t, \vec{r})\}_{j \in \mathbb{K}}$ dual da família $\{g_i(t, \vec{r})\}_{i \in \mathbb{J}}$ de forma que os coeficientes desconhecidos possam ser determinados pelo sistema de equações

$$\langle \psi_j, \mathcal{F}(t, \vec{r}, u_p(t, \vec{r}), \dots) \rangle = 0 \quad (442)$$

- As funções duais ψ_j designam-se as funções de peso. Quando as funções $\psi_j = g_j$ o método designa-se de Galerkin. Quando estas funções são funções de escala e onduletas, o método designa-se Galerkin-Onduletas.

• Exemplo

Dado um operador diferencial \mathbb{N} , a equação

$$\partial_t u(t, \vec{r}) - \mathbb{N}(u)(t, \vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \Omega, t > 0 \quad (443)$$

- Condições iniciais e fronteira

$$u(0, \vec{r}) = u_o(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad (444)$$

$$u(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

- Escolham-se funções $y(t, \vec{r})$ e $\{g_i(t, \vec{r})\}_{i \in \mathbb{J}}$ em Ω tais que

$$y(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \quad (445)$$

$$g_i(t, \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

- A solução proposta que verifica as condições fronteira (mas ainda não as iniciais) será

$$u_p(t, \vec{r}) = y(t, \vec{r}) + \sum_i c_i(t) g_i(t, \vec{r}) \quad (446)$$

- Os resíduos \mathbb{R}_E e \mathbb{R}_I definem-se então como as diferenças

$$\mathbb{R}_E(u_p)(t, \vec{r}) = \partial_t u_p(t, \vec{r}) - \mathbb{N}(u_p)(t, \vec{r}) \quad (447)$$

$$\mathbb{R}_I(u_p) = u_o(\vec{r}) - \sum_i c_i(0) g_i(0, \vec{r})$$

- O conjunto de equações algébricas seguintes determinam os valores de $c_i(0)$:

$$\langle \psi_i, \mathbb{R}_I(u_p) \rangle = 0 \quad (448)$$

- Estes valores $c_i(0)$ servem de condições iniciais para o sistema de EDOs que determina os $c_i(t)$

$$\langle \psi_i, \mathbb{R}_E(u_p) \rangle = 0 \quad (449)$$

- ◇ Na sua forma geral este método pode não ter soluções. Mesmo que uma combinação finita de N funções g_i forneça uma solução aproximada, estas não convergem necessariamente de forma fraca para uma solução exacta da equação.

■ Armazenamento e transmissão de Impressões digitais

- Algoritmo de Quantização Escalar de Onduletas FBI-WSQ

"The FBI Wavelet-Scalar Quantization Standard for gray-scale fingerprint image compression", Jonathan N. Bradley and Christopher M. Brislawn Los Alamos National Laboratory, Tom Hopper Federal Bureau of Investigation

- ◇ Neste processo uma imagem é transformada com uma onduleta simétrica em $2^6 = 64$ canais. Seguidamente é quantizada para se obter um conjunto de coeficientes inteiros, os quais são de seguida comprimidos usando codificação de Huffman. Os dados assim comprimidos podem ser armazenados com factores de compressão 20:1 sem perda significativa de qualidade para a reconstrução e identificação de "minúcias" distintivas consistindo em anéis, bifurcações e vértices das linhas de impressão digital.

- Processamento de sinal, Filtros e onduletas
 - Design de Filtros multi-canal
 - Bancos de Filtros Ortogonais
 - Reconstrução Perfeita e design de Bancos de Filtros

- Análise de onduletas bi-dimensiõnal
 - Compressõo de Imagem, Audio
 - Reconhecimento de padrões
 - Denoising e detecçõo de estruturas

- Aplicações Físicas
 - análise e síntese da voz,
 - codificaçõo de sinal em telecomunicações,
 - detecçõo de contornos em sistemas retinianos,
 - detecçõo de estrutura em turbulência,
 - interpolaçõo em espaçõs funcionais,
 - detecçõo remota de fontes,
 - Estudo de padrões: compreender as regras que determinam a estrutura de larga escala (macroscõpicos) a partir de processos físicos microscõpicos. (Física, Química, Biologia, Ecologia)
 - Mecânica dos fluidos (*Lewalle, '94- Acta Mech 104, 1*) Classes de onduletas obtidas a partir de filtros Gaussianos transformam Laplacianos em derivadas de primeira ordem na escala, transformando equações parabõlicas ou elípticas em equações de onda de primeira ordem ou ordinárias (Burgers, Poisson e Navier Stokes)
 - Grupo de renormalizaçõo em QFT, descriçõo variacional de teorias de campo estatísticas em redes. Os coeficientes de *onduletas* exprimem com poucos números as propriedades rescaláveis da teoria. Transformações do grupo de renormalizaçõo podem ser implementadas com estes coeficientes como variáveis dinâmicas básicas e somando em cada escala (aqui naturalmente definidas). (*Best-Schäfer-'94*)(hep-lat/9402012)
 - Caos clássico e quântico. Conversõo para Onduletas de métodos espectrais de resoluçõo das equações de evoluçõo com potenciais que exibem classicamente dinâmicas caóticas.
 - Entropia de Estados-Coerentes S_{CS} para análogos quânticos de mapas clássicos caóticos em espaçõs de fase compactos: (Baker, gato Arnold (T^2), piõo periódicamente perturbado (S^2)) Estes sistemas têm uma entropia de Kolmogorov-Sinai S_{KS} positiva classicamente, mas zero nas extensões quânticas do conceito.

Medidas quânticas 'fuzzy' conduzem o sistema, após a medida, para uma mistura de estados coerentes.

$S_{CS} = S_{Dyn} + S_{MSr}$. No limite semi-clássico $S_{MSr} \rightarrow 0$.

Epílogo: Teoria de Grupos, Estados Coerentes e Onduletas

- O Grupo de Heisenberg e os estados coerentes do Oscilador Harmónico
- O grupo Afim e as Onduletas
- Estados coerentes do átomo de Hidrogénio.

Bibliografia

- Livros

"Ten Lectures on Wavelets", Ingrid Daubechies, SIAM 1992

"An Introduction to Wavelets" (Wavelet Analysis and Its Applications, Vol 1), C.K.Chui, Academic Press 1992

"Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications" (Wavelet Analysis and Its Applications, Vol 2), C.K.Chui, Academic Press 1992

"The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making", Barbara Burke Hubbard, AK Peters 1998

"Wavelets and Filter Banks", Gilbert Strang, Truong Nguyen, Wellesley-Cambridge Press, 1996

"Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer", C. Sidney Barrus, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo, Prentice-Hall 1998

"Wavelets: Tools for Science & Technology", Stéphane Jaffard, Yves Meyer, Robert D. Ryan, SIAM 2001

- Artigos

- Ver na página em construção http://gamow.ist.utl.pt/~amaro/curso_onduletas.html.