

■ **Bases Bi-Ortogonais**

- ◇ Dada uma análise multiresolução $\dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$, a função de escala $\phi \in V_0$ define uma base de Riesz $\{\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0 . Em vez de ortonormalizar esta base, crie-se uma base dual $\{\tilde{\phi}_{0,\tilde{k}}(t) = \tilde{\phi}(t - \tilde{k})\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}}$ i.e. tal que

$$\langle \phi_{0,k}, \tilde{\phi}_{0,\tilde{k}} \rangle = \delta_{k,\tilde{k}} \tag{370}$$

- ◇ O espaço \tilde{V}_0 gerado pela base $\{\tilde{\phi}_{0,\tilde{k}}(t)\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}}$ faz agora parte de uma análise multiresolução $\dots \subset \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1} \subset \dots$ com bases $\{\tilde{\phi}_{j,\tilde{k}}(t)\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}}$ duais das $\{\phi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.
- ◇ Construa-se agora uma sequência de sub-espacos $W_j \subset V_{j+1}$ e $\tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ com bases mutuamente ortogonais $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{\tilde{\psi}_{j,\tilde{k}}(t)\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,\tilde{k}} \rangle = \delta_{j,j} \delta_{k,\tilde{k}} \tag{371}$$

$$W_j \perp \tilde{V}_j \quad ; \quad \tilde{W}_j \perp V_j \quad ; \quad W_j \perp \tilde{W}_{j'} \quad (j \neq j') \tag{372}$$

- Obtemos assim a possibilidade de analisar e sintetizar um sinal na forma

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \tag{373}$$

● **Relações entre filtros**

- ◇ Utilizando as respectivas equações de dilatação para $\phi(t)$ e $\tilde{\phi}(t)$ obtemos condições duais para as transformadas de Fourier dos filtros passa-baixos e passa-banda que permitem a reconstrução perfeita do sinal e a determinação de funções de escala e onduletas.

- Equações de dilatação

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \quad ; \quad \tilde{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2t - k) \tag{374}$$

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad ; \quad \tilde{\Phi}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{H}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tag{375}$$

- Equações de onduletas

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \quad ; \quad \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2t - k) \tag{376}$$

$$\Psi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} G\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad ; \quad \tilde{\Psi}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{G}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tag{377}$$

- ◇ As condições de ortogonalidade entre espaços V_j, \tilde{V}_j e W_j, \tilde{W}_j traduzem-se então nas relações entre filtros em quadratura

$$\tilde{H}(\nu) H^*(\nu) + \tilde{H}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) H^*\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = 2 \tag{378}$$

bem como

$$\begin{cases} \tilde{G}(\nu) G^*(\nu) + \tilde{G}(\nu + \frac{1}{2}) G^*(\nu + \frac{1}{2}) = 2 \\ \tilde{G}(\nu) H^*(\nu) + \tilde{G}(\nu + \frac{1}{2}) H^*(\nu + \frac{1}{2}) = 0 \\ \tilde{H}(\nu) G^*(\nu) + \tilde{H}(\nu + \frac{1}{2}) G^*(\nu + \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

• Solução das equações de quadratura entre filtros

$$G(\nu) = -e^{-2\pi i \nu} \tilde{H}^*\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \tilde{G}(\nu) = -e^{-2\pi i \nu} H^*\left(\nu + \frac{1}{2}\right), \quad (6.9)$$

$$\mathfrak{g}_k = (-1)^k \tilde{\mathfrak{h}}_{1-k} \quad ; \quad \tilde{\mathfrak{g}}_k = (-1)^k \mathfrak{h}_{1-k} \quad (6.10)$$

- Em geral, para onduletas com os primeiros $p = 2n$ momentos nulos (resp. $\tilde{p} = 2\tilde{n}$) deve-se obter uma solução da forma

$$H(\nu) = (e^{-\pi i \nu})^\kappa \cos(\pi \nu)^{p+\kappa} P(\cos(2\pi \nu)) \quad ; \quad \tilde{H}(\nu) = (e^{-\pi i \nu})^\kappa \cos(\pi \nu)^{\tilde{p}+\kappa} \tilde{P}(\cos(2\pi \nu)) \quad (380)$$

onde $\kappa = 0, 1$ dependendo do comprimento do filtro ser ímpar ou par, uma consequência de exigir simetria em torno de 0 entre os coeficientes \mathfrak{h}_k para o caso ímpar (i.e. $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h}_{-k}$) ou simetria em torno de $1/2$ para o caso par (i.e. $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h}_{1-k}$). Estas condições garantem que os filtros $H(\nu)$ e $\tilde{H}(\nu)$ são reais e polinomiais em $z = \cos[\nu]$.

- A substituição directa de (380) em (378) permite calcular os coeficientes de filtro \mathfrak{h}_k sem necessidade de usar factorização espectral como no caso Ortogonal.

• Onduletas Biortogonais de Splines

- No caso mais simples escolhemos $\tilde{P}(\cos[\nu]) = 1$. Então

$$\tilde{H}(\nu) = \begin{cases} \cos(\pi \nu)^{\tilde{p}} & (\tilde{p} = 2\tilde{n}) \\ e^{-\pi i \nu} \cos(\pi \nu)^{\tilde{p}} & (\tilde{p} = 2\tilde{n} + 1) \end{cases} \quad (381)$$

- Isto significa que $\tilde{\phi}(t)$ é uma B-Spline de ordem $\tilde{p} - 1$,

$$\tilde{\Phi}(\nu) = (e^{-i \nu})^\kappa \left(\frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \right)^{\tilde{p}} = \left(e^{-\pi i \frac{\nu}{2}} \right)^\kappa \cos\left(\frac{\pi \nu}{2}\right)^{\tilde{p}} \left(e^{-\pi i \frac{\nu}{2}} \right)^\kappa \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \nu}{2}\right)}{\frac{\pi \nu}{2}} \right)^{\tilde{p}} = \tilde{H}\left(\frac{\nu}{2}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (382)$$

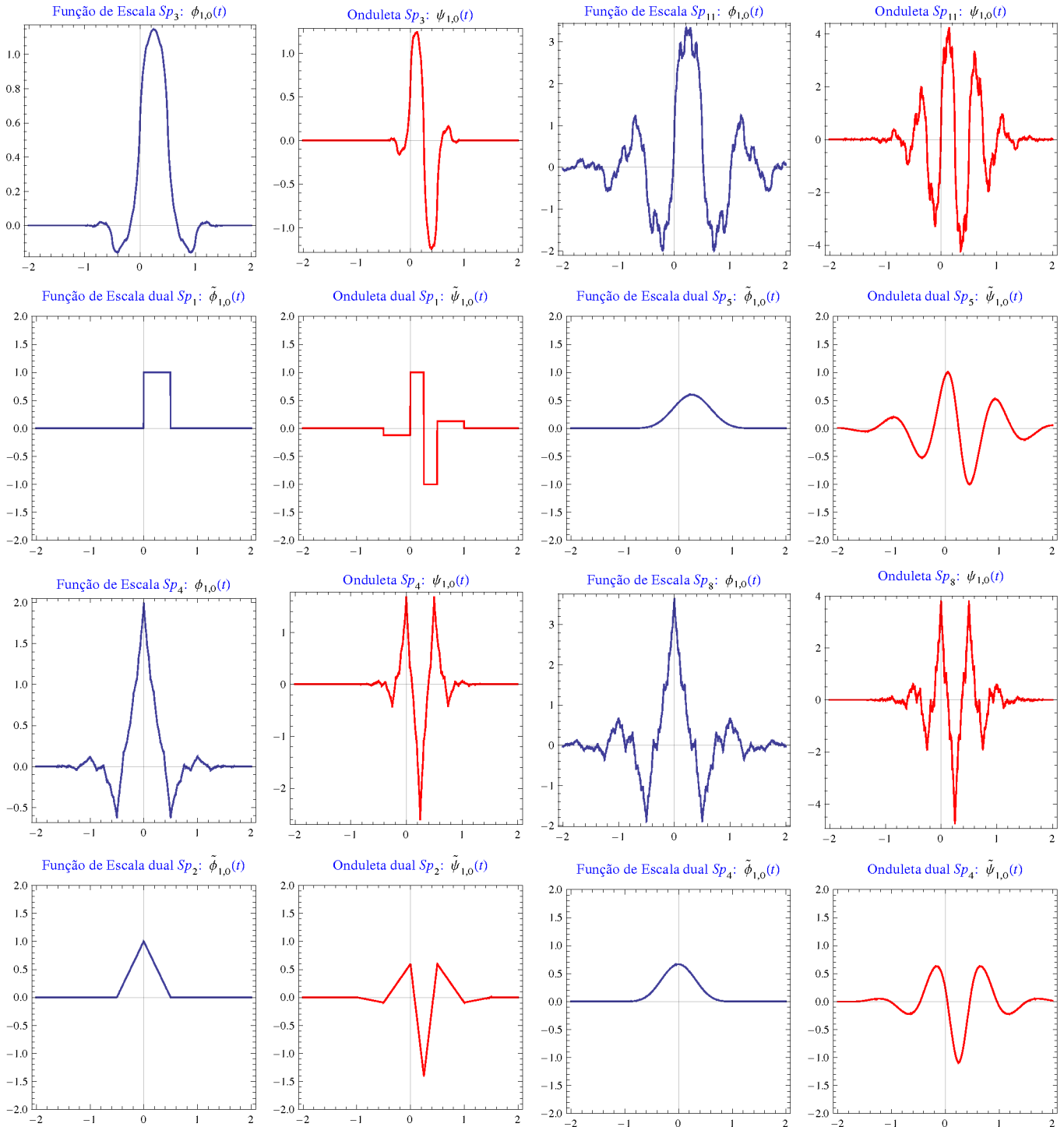
- Obtém-se assim com $p = 2n$ e $\tilde{p} = 2\tilde{n}$

$$H(\nu) = \cos(\pi \nu)^p \sum_{m=0}^{n+\tilde{n}-1} \binom{m+n+\tilde{n}-1}{m} \sin(\pi \nu)^{2m}$$

ou com $p = 2n + 1$ e $\tilde{p} = 2\tilde{n} + 1$

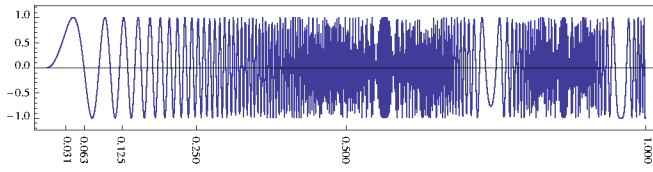
$$H(\nu) = e^{-\pi i \nu} \cos(\pi \nu)^{2n+1} \sum_{m=0}^{n+\tilde{n}} \binom{m+n+\tilde{n}}{m} \sin(\pi \nu)^{2m}$$

- Uma vez definidos os filtros os coeficientes h_k podem ser determinados como os multiplicadores dos termos $e^{-2\pi i \nu}$ da respectiva série.

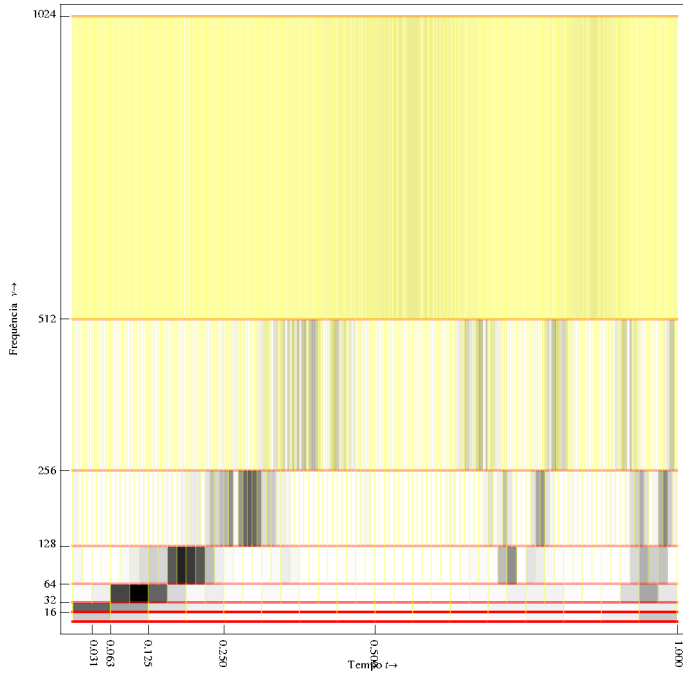


■ Exemplo $f(t) = \text{Sin}[256\pi t^2(1 + 4t^2)]$

◇ Discretização com $N = 2^{10}$ pontos



◇ Gráfico de coeficientes da transformada Spline bi-ortogonal com $p = 10$ e $\tilde{p} = 4$.



■ Algoritmo "à-trous"

- Uma desvantagem do método multiresolução de Mallat e do correspondente algoritmo piramidal é que a decimação que se verifica no sinal impossibilita a construção de uma análise invariante por translacção, o que põe importantes problemas no processamento isotrópico de imagens e na restauração de sinais.
- A transformada contínua de onduletas é contudo tradicionalmente invariante, não só para translacções como para dilatações:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{a,b} \mathbb{T}_\tau f &= \mathbf{W}_{a,b-\tau} f \\ \mathbf{W}_{a,b} \mathbb{D}_s f &= \frac{1}{s} \mathbf{W}_{sa, sb} f \end{aligned} \quad (383)$$

- Esta última propriedade torna a transformada de onduletas particularmente útil no estudo de sinais com uma grande hierarquia de estruturas, como o caso de fractais ou multifractais. A invariância de translacção garante que a análise é independente da origem escolhida para o sinal.
- Para construir uma transformada de onduletas translacionalmente invariante vamos discretizar a transformada contínua na escala $a = 2^{-j}$ mas não na translacção de imediato. Obtém-se assim a fórmula (relembrando que $\bar{\psi}_j(t) = \sqrt{2^j} \psi(-2^j t)$)

$$\mathbf{W}_{j,b} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{2^j} \psi(2^j(t-b)) dt = f \star \bar{\psi}_j(b) \quad (384)$$

- Então, assumindo uma aproximação inicial do sinal com resolução máxima usando a função de escala $\phi(t)$

$$\mathfrak{S}_{0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t-k) dt = f \star \bar{\phi}(k) \quad (385)$$

- podemos construir as aproximações e detalhes

$$\mathfrak{S}_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{2^j} \phi(2^j(t-k)) dt = f \star \bar{\phi}_j(k) \quad (386)$$

$$\mathbf{W}_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{2^j} \psi(2^j(t-k)) dt = f \star \bar{\psi}_j(k) \quad (387)$$

- Note-se a diferença com o algoritmo piramidal multiresolução que corresponde a utilizar uma amostragem crítica de $b = 2^{-j} k$ a cada escala.
- No algoritmo "à-trous" cada escala retém o mesmo número de amostras, ou seja não existe decimação das médias e dos detalhes.
- A análise multiresolução dum sinal $\mathfrak{s}_{j,k}$ com $N = 2^j$ amostras produz $\frac{N}{2}$ coeficientes de média $\mathfrak{s}_{j-1,k}$ (decimação) uma vez que a convolução do sinal com os filtros h_k e g_k começa sempre nas amostras pares do sinal à escala anterior.

$$\mathfrak{s}_{j-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_{k'} \mathfrak{s}_{j,k'+2k} \quad (388)$$

- Começando na escala mais fina, podemos repetir a operação de filtragem começando com as amostras ímpares do sinal $\tilde{\mathfrak{s}}_{j,k} = \mathfrak{s}_{j,k+1}$, obtendo assim outros $\frac{N}{2}$ coeficientes $\tilde{\mathfrak{s}}_{j-1,k}$. Entrelaçando estes resultados

recuperamos um sinal de comprimento N onde

$$\mathfrak{S}_{J-1,k} = \begin{cases} \mathfrak{s}_{J-1,k} & \text{se } k = \text{par} \\ \tilde{\mathfrak{s}}_{J-1,k} & \text{se } k = \text{ímpar} \end{cases} \quad (389)$$

- No nível seguinte a transformada das N amostras $\mathfrak{S}_{J-1,k}$ produzirá outros N valores se entrarmos em conta com as decimações que se produziram tanto no conjunto $\mathfrak{s}_{J-1,k}$ como no conjunto $\tilde{\mathfrak{s}}_{J-1,k}$, que produziram apenas $\frac{N}{4}$ coeficientes cada um. Temos assim que criar mais dois conjuntos de $\frac{N}{4}$ elementos usando o mesmo esquema de transladar o sinal $\mathfrak{S}_{J-1,k}$ duas vezes para obter o sinal $\mathfrak{S}_{J-2,k}$ à escala seguinte. É por isso que ao contrário da multiresolução, as translações são aqui de $b_J = 2^J k$ para contrabalançar o entrelaçamento das transformadas.
- Em termos de filtros a construção descrita do algoritmo "à-trous" corresponde a criar, a partir do filtro h_k , filtros $h_{J,k}$ inserindo $2^J - 1$ zeros entre elementos sucessivos h_k e h_{k+1} , daí a designação do algoritmo. Utilizando as respectivas equações de dilatação para as funções de escala e onduletas podemos então obter fórmulas simples de análise

$$\mathfrak{S}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_{k'} \mathfrak{S}_{J,k+2^J k'} = \mathfrak{S}_{J,k} \star \bar{h}_{J,k} \quad (390)$$

$$\mathfrak{W}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} g_{k'} \mathfrak{W}_{J,k+2^J k'} = \mathfrak{W}_{J,k} \star \bar{g}_{J,k} \quad (391)$$

e para a síntese

$$\mathfrak{S}_{J,k} = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_{J-1} \star \bar{h}_{J,k} + \mathfrak{W}_{J-1,k} \star \bar{g}_{J,k}) \quad (392)$$

- O algoritmo "à-trous" é redundante, o que não o torna atraente para compressão de dados. Contudo torna-se útil para transmissão de sinais em linhas com perdas porque a redundância garante a restauração do sinal original ou de uma boa aproximação dele

Representações Tempo-Freqüência: Bases Trigonômétricas locais

■ Bases de Senos e Cosenos localizados

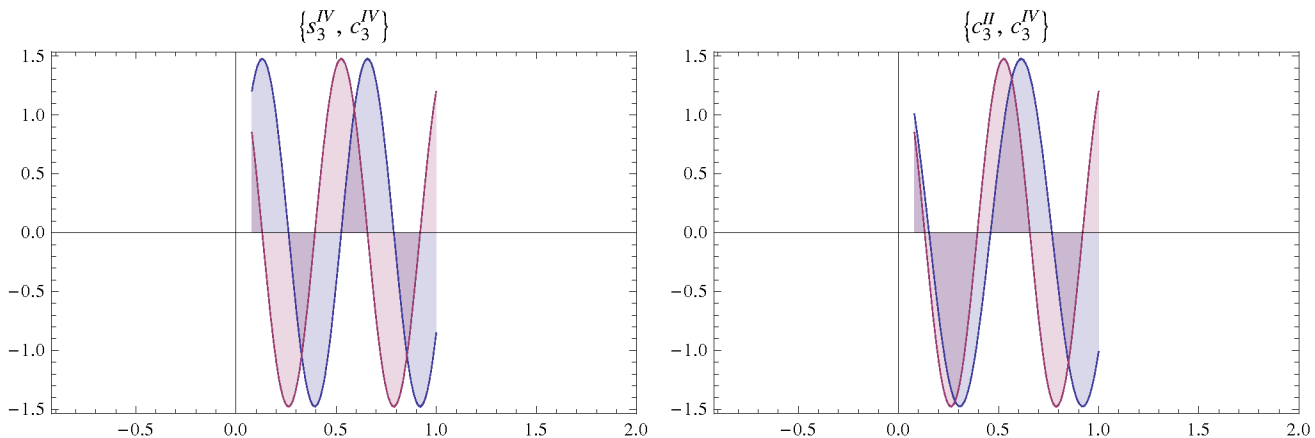
- Bases ortonormadas para transformadas de Fourier de seno e coseno num intervalo $[a, b]$ de comprimento $L = b - a$ podem ser definidas como $\{s_k^H(t)\}_{k=1,2,\dots}, \{c_k^H(t)\}_{k=0,1,2,\dots}, \{s_k^{IV}(t)\}_{k=0,1,2,\dots}, \{c_k^{IV}(t)\}_{k=0,1,2,\dots}$.

$$s_k^H(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} k(t-a)\right) \quad (393)$$

$$c_k^H(t) = s_k \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L} k(t-a)\right) \quad \text{onde } s_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k=0 \\ 1 & \text{True} \end{cases} \quad (394)$$

$$s_k^{IV}(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(k + \frac{1}{2}\right)(t-a)\right) \quad (395)$$

$$c_k^{IV}(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L} \left(k + \frac{1}{2}\right)(t-a)\right) \quad (396)$$



■ Bases trigonométricas locais de Coifman, Meyer e Malvar

- As bases anteriores correspondem a utilizar uma janela rectangular de largura $L = b - a$, com as quais se pode cobrir todo o domínio dum sinal $f(t)$. Contudo as descontinuidades nas bordas destas bases criam artifícios (Gibbs).
- Querendo obter bases em intervalos diferentes $[a_j, a_{j+1}]$ do domínio dum sinal $f(t)$ podem-se multiplicar estas bases por janelas suaves $h_j(t)$ e $h_{j+1}(t)$ na vizinhança dos bordos a_j e a_{j+1} , i.e. funções que crescem de 0 para 1 em $[a_j - \varepsilon_j, a_j + \varepsilon_j]$ e decrescem de 1 para 0 em $[a_{j+1} - \varepsilon_{j+1}, a_{j+1} + \varepsilon_{j+1}]$.
- Torna-se necessário garantir que as alterações e sobreposições nos bordos destas funções de base mantêm a ortogonalidade entre funções no mesmo intervalo e em intervalos adjacentes.
- Coifman e Meyer usam uma funções suaves correspondendo a uma janela $h(t)$ que obedece à condição

$$h^2(t) + h^2(1-t) = 1 \quad (397)$$

o que corresponde a escolher na vizinhança de a_j

$$h_j(t) = h\left(\frac{1}{2\varepsilon_j}(t - a_j + \varepsilon_j)\right) \tag{398}$$

obtendo-se assim as condições de ortonormalidade entre funções de base no mesmo intervalo

$$h_j^2(a_j + t) + h_j^2(a_j - t) = 1 \quad \text{para } |t| < \varepsilon_j \tag{399}$$

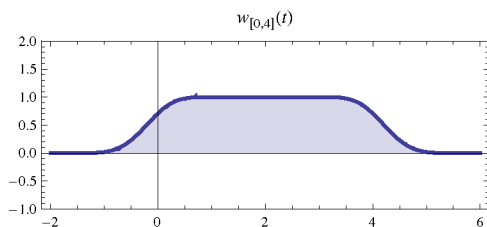
e as condições de ortogonalidade entre funções de base em intervalos adjacentes

$$h_{j-1}(a_j + t) = h_j(a_j - t) \quad \text{para } |t| \leq \varepsilon_j \tag{400}$$

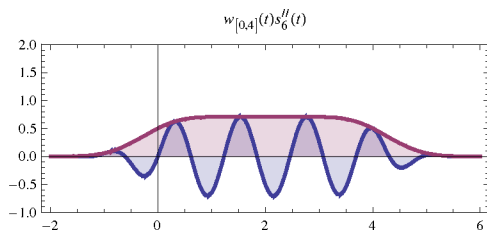
■ Uma solução possível de (397) é $h(t) = \text{Sin}\left[\frac{\pi}{2}\eta[t]\right]$ onde $\eta(t-1) = 1 - \eta(t)$. Obtemos assim janelas

$$w_{[a_j, a_{j+1}]}(t) = \begin{cases} h_j(t) & a_j - \varepsilon_j < t < a_j + \varepsilon_j \\ 1 & a_j + \varepsilon_j \leq t \leq a_{j+1} - \varepsilon_{j+1} \\ h_{j+1}(t) & a_{j+1} - \varepsilon_{j+1} < t < a_{j+1} + \varepsilon_{j+1} \end{cases} \tag{401}$$

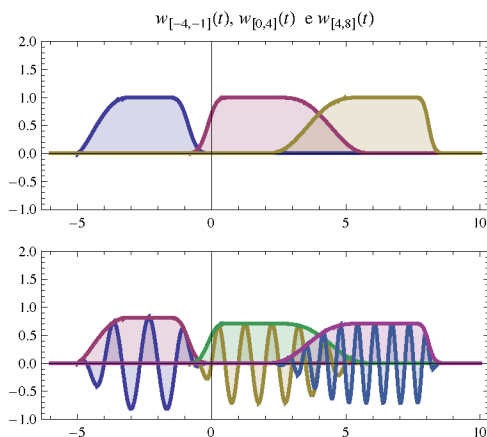
◇ Janela simétrica no intervalo $[0, 4]$ com intervalo de transição $\varepsilon = 1.5$ e função de transição $h(t) = \text{Sin}\left[\frac{\pi}{2}\text{Sin}\left[\frac{\pi}{2}\text{Sin}\left[\frac{\pi}{2}t\right]^2\right]\right]^2$



◇ Pacote Seno no intervalo $[0, 4]$

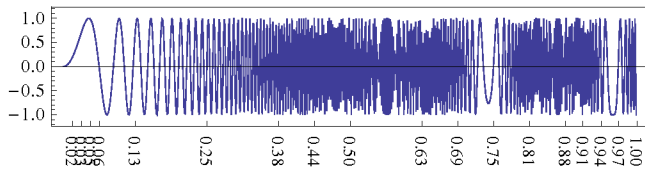


◇ As funções h_j e h_{j+1} não precisam de ser simétricas desde que verifiquem as condições anteriores em bordos adjacentes.

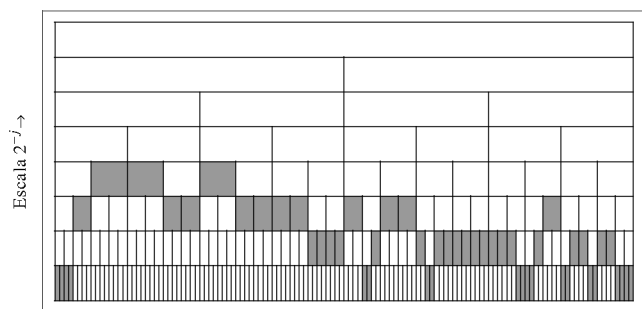
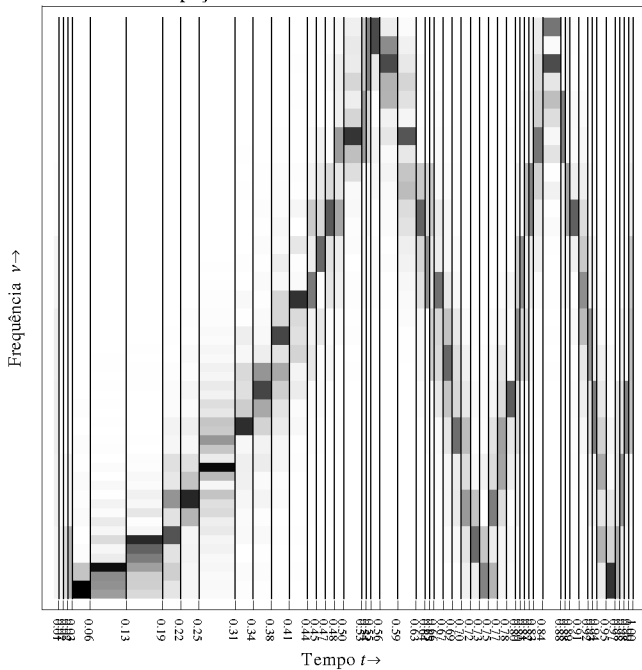


■ Transformadas de Pacotes de Senos e Cosenos localizados

- A discretização das transformadas com bases trigonométricas localizadas anteriores permite criar um banco de pacotes de senos e cosenos correspondendo a diversas resoluções N_j escolhidas para cada intervalo $[a_j, a_{j+1}]$, de forma que $L_j = a_{j+1} - a_j = N_j \Delta_j$. Uma vez escolhido N_j e h a transformada local do sinal no intervalo $[a_j, a_{j+1}]$ decompõe essa parte do sinal em componentes de resoluções $N_j/2, N_j/4, \dots, N_j/2^n$. Em diferentes partes do sinal a escolha da resolução óptima pode ser definida usando uma função de custo, o que permite escolher as melhores bases para a análise do sinal.



Espaço de Fases com Pacotes Cosenos hc^{IV}



Melhor Base com Pacotes Cosenos hc^{IV}

• **Comparação com Pacotes de Onduletas**

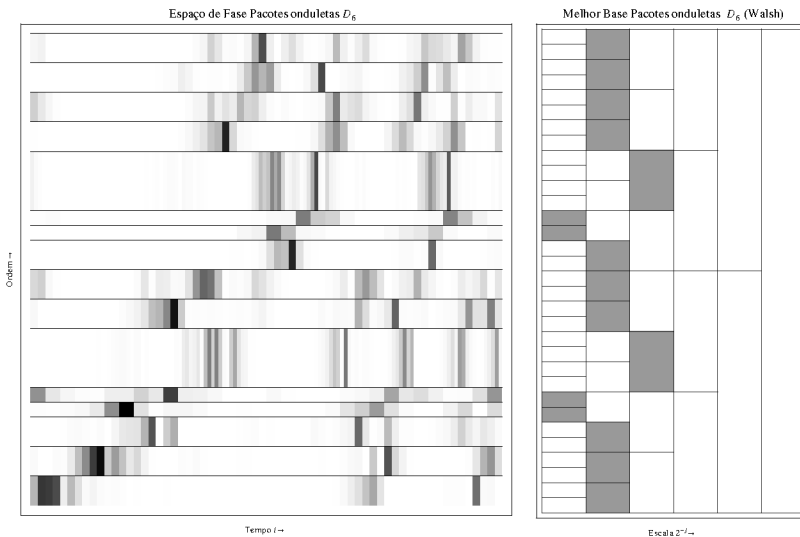
■ **Ordenação de pacotes em frequência (Gray Code)**

- ◊ A árvore de pacotes de onduletas constrói-se iterativamente aplicando as operações de média \mathcal{S} e detalhe \mathcal{D} a todos os espaços $V_j = W_{j,0}$ e $W_{j,k}$ em cada escala. As sequências de operações \mathcal{S} , \mathcal{D} , quando lidas da esquerda para a direita (i.e. acção à direita), criam uma ordenação normal (Walsh) na árvore, mas pelo menos para os pacotes de onduletas de Haar-Walsh e Shannon as suas frequências no sentido de Fourier só ficam ordenadas se utilizarmos a codificação de Gray que consiste em trocar a ordem dos pacotes quando provêm de um que tenha um número ímpar de operações \mathcal{D} . A substituição de \mathcal{S} por 0 e de \mathcal{D} por 1 significa que na ordem normal a sequência de pacotes em cada escala é ordenada pela representação binária da sequência de inteiros, enquanto que a codificação de Gray corresponde a trocar cada posição k na ordem normal pela posição dada por $k' = \text{BitXor}[k, \text{BitShiftRight}[k]]$.

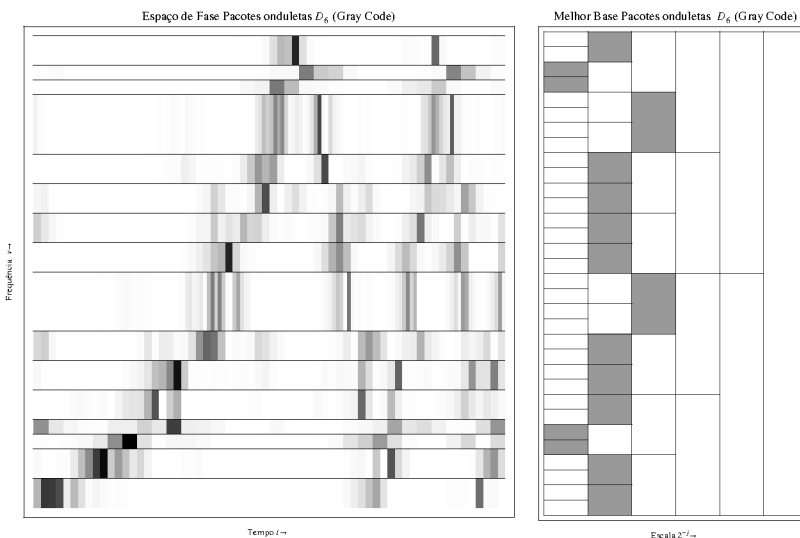
| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|-----|-----|--------------------|-----|-----|-----|-------------------------------------|-----|-----|-----|--------------------|-----|-----|-----|
| \mathcal{D} 1 | | | | \mathcal{S} 0 | | | | \mathcal{D} 1 | | | | \mathcal{S} 0 | | | |
| DD | | DS | | SD | | SS | | DS | | DD | | SD | | SS | |
| 11 | | 10 | | 01 | | 00 | | 10 | | 11 | | 01 | | 00 | |
| DDD | DDS | DSD | DSS | SDD | SDS | SSD | SSS | DSS | DSD | DDD | DDS | SDS | SDD | SSD | SSS |
| 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | 100 | 101 | 111 | 110 | 010 | 011 | 001 | 000 |
| Ordenação Normal (Walsh) | | | | | | | | Ordenação em frequência (Gray Code) | | | | | | | |

(402)

- ◊ Gráfico de coeficientes da transformada com pacotes de onduletas Daubechies D_6 com ordenação normal (Walsh).



- ◊ Gráfico de coeficientes da transformada com pacotes de onduletas Daubechies D_6 com ordenação Gray Code em frequência.



Onduletas de Segunda Geração

■ "Lifting" de Onduletas (Wim Sweldens)

- A transformada de onduleta baseia-se num método de transformação linear dum sinal com decimação, e é equivalente a uma decomposição com bancos de dois filtros sub-banda em quadratura.
- O esquema de "lifting" de onduletas é uma forma de criar análises multiresolução não-lineares no sentido de permitir transformadas de sinais com amostragens irregulares e mesmo definir transformadas de onduletas de inteiros para inteiros. A partir de uma separação entre os elementos pares $f_{j,k}^p = f_{j,2k}$ e ímpares $f_{j,k}^i = f_{j,2k+1}$ do sinal $f_{j,k}$ à escala j , os coeficientes de onduleta $\mathcal{W}_{j-1,k} f$ são calculados a partir da diferença entre a parte ímpar do sinal f_j^i uma "Previsão" $\mathcal{P}(f_j^p)$ dependendo apenas.
- Permite ainda criar onduletas de segunda geração em variedades (por exemplo onduletas esféricas).
- Todos os métodos multiresolução de transformadas de onduletas podem ser escritos em termos de "lifting" com a introdução do conceito de onduleta "lazy". Os respectivos filtros h_k e g_k apenas seleccionam as amostras pares e ímpares sem filtragem adicional.

$$\begin{aligned} \phi(t) = \delta(t) \quad ; \quad \psi(t) = \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ H(\nu) = 1 \quad ; \quad G(\nu) = e^{-2\pi i \nu} \\ h_k = \delta_{0,k} \quad ; \quad g_k = \delta_{1,k} \end{aligned} \tag{403}$$

◇ Estas funções de escala onduletas distribucionais podem ser transformadas em funções normais usando o "lifting" apropriado.

● Proposição (Vetterli)

◇ Dados dois filtros duais de suporte finito h_k e \tilde{h}_k , um outro filtro h_k^l é também dual de \tilde{h}_k SSE existe um filtro finito r_k tal que

$$H^l(\nu) = H(\nu) + e^{-2\pi i \nu} \tilde{H}^* \left(\nu + \frac{1}{2} \right) R^*(2\nu) \tag{404}$$

◇ De acordo com isto um novo conjunto de filtros biortogonais $\{h_k^l, g_k^l, \tilde{h}_k^l, \tilde{g}_k^l\}$ pode ser construído dos antigos pela definição

$$\left\{ \begin{aligned} H^l(\nu) &= H(\nu) + G(\nu) R^*(2\nu) \\ G^l(\nu) &= G(\nu) \\ \tilde{H}^l(\nu) &= \tilde{H}(\nu) \\ \tilde{G}^l(\nu) &= e^{-2\pi i \nu} H^{l*} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) = \tilde{G}(\nu) - \tilde{H}(\nu) R(2\nu) \end{aligned} \right. \tag{405}$$

● Teorema (Sweldens)

◇ Dada uma família de funções de escala biortogonais $\phi(t)$, $\tilde{\phi}(t)$ de suporte compacto e respectivas onduletas $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ é possível construir uma nova família de funções biortogonais a partir de uma sequência finita r_k por "lifting" dum par de filtros associados

h_k e \tilde{g}_k através da definição de novos filtros h_k^l e \tilde{g}_k^l :

$$h_k^l = h_k + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} r_{-n} \quad ; \quad \tilde{g}_k^l = \tilde{g}_k - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2n} r_n \quad (406)$$

◊ A partir daqui a construção das respectivas funções de escala e onduletas duais segue-se de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^l(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi^l(2t-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_{-k} \psi^l(t-k) \\ \tilde{\phi}^l(t) = \tilde{\phi}(l) \\ \psi^l(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi^l(2t-k) \\ \tilde{\psi}^l(t) = \tilde{\psi}(t) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \tilde{\phi}(t-k) \end{array} \right. \quad (407)$$

◊ Um lifting dual pode ser usado modificando \tilde{h}_k e g_k

$$\tilde{h}_k^l = \tilde{h}_k - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{k-2n} r_n \quad ; \quad g_k^l = g_k + \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} r_{-n} \quad (408)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^l(t) = \phi(l) \\ \tilde{\phi}^l(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\phi}^l(2t-k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \tilde{\psi}^l(t-k) \\ \psi^l(t) = \psi(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_{-k} \phi(t-k) \\ \tilde{\psi}^l(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{\phi}^l(2t-k) \end{array} \right. \quad (409)$$

■ Todos os filtros biortogonais podem ser sintetizados por uma sucessão de "liftings" e "liftings" duais associados aos filtros "lazy", modulo translações e dilatações.

■ **Algoritmo de "Lifting"**

● **Separação do sinal em cada escala**

■ Separe o sinal numa dada escala $\{f_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ em amostras pares e ímpares

$$\mathfrak{S}_{j,k}^p = f_{j,2k} \quad ; \quad \mathfrak{S}_{j,k}^l = f_{j,2k+1} \quad (410)$$

● **Previsão em termos das componentes pares**

■ Use um algoritmo pré-determinado $\mathcal{P}_k(\overline{\mathfrak{S}}_j^p)$ para prever o valor das amostras ímpares $\overline{\mathfrak{S}}_j^l$ em termos das

amostras pares $\vec{\mathfrak{S}}_j^P$. A diferença com o valor real $\mathfrak{S}_{j,k}^I$ deve ser pequeno e define o coeficiente de onduleta "lifted" à escala grossa acima:

$$\mathfrak{w}_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^I - \mathcal{P}_k(\vec{\mathfrak{S}}_j^P) \quad (411)$$

- **Atualize a aproximação do sinal à escala grossa seguinte**

- Defina a aproximação do sinal na escala acima usando um algoritmo pré-determinado $\mathcal{A}_k(\vec{\mathfrak{W}}_{j-1})$ em função dos detalhes a essa escala e as amostras pares $\vec{\mathfrak{S}}_j^P$ à escala anterior:

$$f_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^P + \mathcal{A}_k(\vec{\mathfrak{W}}_{j-1}) \quad (412)$$

- **Exemplos**

- **Onduletas de Haar através de "lifting"**

- No caso de Haar os operadores de previsão \mathcal{P} e actualização \mathcal{A} são

$$\text{Haar} \equiv \begin{cases} \mathcal{P}_k(\vec{\mathfrak{S}}_j^P) = \mathfrak{S}_{j,k}^P & (j, k \in \mathbb{Z}) \\ \mathcal{A}_k(\vec{\mathfrak{W}}_{j-1}) = \frac{1}{2} \mathfrak{w}_{j-1,k} & (j, k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (413)$$

◇ Neste caso

$$\mathfrak{w}_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^I - \mathfrak{S}_{j,k}^P = f_{j,2k+1} - f_{j,2k} \quad (414)$$

$$f_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^P + \frac{1}{2} \mathfrak{w}_{j-1,k} = \frac{1}{2} (f_{j,2k} + f_{j,2k+1}) \quad (415)$$

- **Onduletas bi-ortogonais de Cohen-Daubechies-Faveau**

- Onduletas lineares podem ser usadas para reproduzir exactamente sinais lineares por segmentos.

$$\begin{cases} \mathcal{P}_k(\vec{\mathfrak{S}}_j^P) = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_{j,k}^P + \mathfrak{S}_{j,k+1}^P) & (j, k \in \mathbb{Z}) \\ \mathcal{A}_k(\vec{\mathfrak{W}}_{j-1}) = \frac{1}{4} (\mathfrak{w}_{j-1,k-1} + \mathfrak{w}_{j-1,k}) & (j, k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (416)$$

◇ Neste caso

$$\mathfrak{w}_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^I - \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_{j,k}^P + \mathfrak{S}_{j,k+1}^P) = f_{j,2k+1} - \frac{1}{2} (f_{j,2k} + f_{j,2(k+1)}) \quad (417)$$

$$f_{j-1,k} = \mathfrak{S}_{j,k}^P + \frac{1}{4} (\mathfrak{w}_{j-1,k-1} + \mathfrak{w}_{j-1,k}) = \frac{1}{8} (-f_{j,2(k-1)} + 2f_{j,2k-1} + 6f_{j,2k} + 2f_{j,2k+1} - f_{j,2(k+1)}) \quad (418)$$

- **Inversão da Transformada**

- A inversão dos passos de análise por "lifting" é facilmente conseguida através de iteração dos passos seguintes.

$$\begin{cases} f_{j,2k} = \mathfrak{S}_{j,k}^p = f_{j-1,k} - \mathcal{A}_k(\overline{\mathfrak{W}}_{j-1}) \\ f_{j,2k+1} = \mathfrak{S}_{j,k}^l = \mathfrak{W}_{j-1,k} + \mathcal{P}_k(\overline{\mathfrak{S}}_j^p) \end{cases} \quad (419)$$