

## ■ Escolha construção de Funções de Escala e Filtros

- A capacidade de uma base de onduletas aproximar de forma eficiente uma função, quer para compressão de dados, redução de ruído ou velocidade de cálculo, depende do número de coeficientes não-nulos da respectiva transformada. Isto acontece essencialmente se a maioria dos coeficientes de alta-resolução forem pequenos, o que depende da regularidade da função a analisar e do número de momentos nulos da onduleta-mãe e do seu suporte.

◇ Se  $f \in C^m(\mathbb{R})$  então pode ser aproximado localmente por um polinómio de grau  $m$ . Se  $m < p$ , número de momentos nulos de  $\psi$ , então as onduletas são ortogonais a quaisquer polinómios de grau  $p - 1$  e os coeficientes  $\mathcal{W}_{j,k}(f)$  devem ser pequenos para  $j$  grande.

- Estas condições traduzem-se no espaço dual em constrangimentos nos filtros  $H(\nu)$ .

◇ A anulação dos primeiros  $p$  momentos de  $\psi(t)$  implica que  $\Psi(0) = 0$  e as derivadas até à ordem  $p - 1$  de  $\Psi(\nu)$  na origem  $\nu = 0$  são nulas.

$$\left. \frac{d^k \Psi(\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=0} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, p - 1 \quad (317)$$

◇ Da mesma forma  $H(\nu)$  e as suas primeiras  $p - 1$  derivadas anulam-se em  $\nu = \frac{1}{2}$ .

$$\left. \frac{d^k H(\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=1/2} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, p - 1 \quad (318)$$

◇ Para qualquer  $0 \leq m < p$  a seguinte função é um polinómio de grau  $m$  em  $t$

$$Q_m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \phi(t - k) \quad (319)$$

- Para minimizar o número de coeficientes de onduleta que são significativamente diferentes de zero é conveniente reduzir o suporte de  $\psi(t)$ . Se  $\psi(t)$  tiver um suporte compacto de largura  $K$ , as onduletas  $\psi_{j,k}(t)$  têm suporte de largura  $\frac{K}{2^j}$  e  $K$  destas onduletas cobrem um mesmo ponto  $t_0$ . Se  $f(t_0)$  for uma singularidade isolada de  $f$ , os coeficientes de onduletas cujo suporte inclui  $t_0$  serão grandes, daí a vantagem de diminuir  $K$ .

◇ A função de escala  $\phi$  tem suporte compacto SSE o filtro  $h$  também tiver, e é o mesmo suporte compacto  $[k_1, k_2]$ .

◇ O suporte de  $\psi$  é então também compacto e igual a  $\left[ \frac{k_1 - k_2 + 1}{2}, \frac{k_2 - k_1 + 1}{2} \right]$ .

◇ Se  $\psi$  tem  $p$  momentos nulos então o seu suporte é maior ou igual a  $2p - 1$ . A igualdade é atingida para as onduletas de Daubechies. Assim para funções com muitas singularidades é preferível ter onduletas com poucos momentos nulos.

## ■ Construção de funções de escala com suporte compacto

◇ Um conjunto admissível de coeficientes  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é um conjunto de coeficientes que verifica as condições necessárias

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} \quad (320)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2m}^* = \delta_{0,m} \quad (321)$$

◇ A determinação de  $2N$  destes coeficientes pode ser feita exigindo a anulação dos primeiros  $N - 1$  momentos da respectiva onduleta-mãe

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0 \quad (p = 1, \dots, N - 1) \tag{322}$$

◇ em que supostamente

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{2N-1-k}^* \phi(2t - k) \tag{323}$$

◇ Esta hipótese equivale a escolher funções de escala  $\phi(t)$  tais que

$$f(t) \in V_0 \iff f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \phi(t - k) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{N-1} t^{N-1} \tag{324}$$

◇ Neste caso a ortogonalidade de  $W_0 \perp V_0$  traduz-se em  $N - 1$  equações

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k k^p = 0 \quad (p = 1, \dots, N - 1) \tag{325}$$

◇ Em conjunto com as  $N + 1$  equações de admissibilidade (320) e (321) obtemos  $2N$  equações para determinar os coeficientes  $h_k$  que definem a função de escala  $\phi$ .

◇ Uma vez determinados os coeficientes  $h_k$  podemos usar a equação de dilatação para valores inteiros de  $t$  e definir o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \vdots \\ \phi(N-2) \\ \phi(N-1) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \vdots \\ \phi(N-2) \\ \phi(N-1) \end{pmatrix} \tag{326}$$

◇ Esta é uma equação de valores próprios

$$H \vec{\phi}_1 = \lambda \vec{\phi}_1 \tag{327}$$

◇ e a solução com valor próprio  $\lambda = 1$  pode ser normalizada  $|\vec{\phi}_1|^2 = 1$  e define assim os valores de  $\phi$  sobre os inteiros.

◇ Os valores de  $\phi$  na grelha diádica  $\{\frac{n}{2}\}$  são obtidos iterando a equação de dilatação com a solução normalizada  $\vec{\phi}_1$

$$\phi\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi(n - k) \tag{328}$$

### ■ Teorema de Lawton

◇ Dado um conjunto admissível  $\{h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}\}$  de  $2N$  constantes  $h_k \neq 0$ , e definindo  $\phi^{(0)}(t) = \chi_{[0,1]}(t)$  a função característica do intervalo  $[0, 1]$ , então o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi^{(m)}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi^{(m)}(2t - k) \tag{329}$$

converge fracamente em  $L_2(\mathbb{R})$  para uma função de escala única  $\phi(t)$ .

### ■ Transformada de Fourier da Equação de Dilatação

◇ A partir da transformada de Fourier da equação de dilatação temos

$$\Phi(\nu) = \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\nu}{2^k}\right) \right) \tag{330}$$

onde

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i \nu k} \tag{331}$$

◊ No caso de Haar  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  pelo que

$$H(\nu) = h_0 + h_1 e^{-2\pi i \nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-2\pi i \nu}) \tag{332}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^k}} \right) \right) &= \frac{1}{2^n} (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2}}) (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^2}}) \dots (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^n}}) = \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{(1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2}})(1 - e^{-2\pi i \frac{\nu}{2}})}{(1 - e^{-2\pi i \frac{\nu}{2}})} (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^2}}) \dots (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^n}}) = \end{aligned} \tag{333}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{(1 - e^{-2\pi i \nu})}{(1 - e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^2}})(1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^2}})} (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^2}}) \dots (1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^n}}) =$$

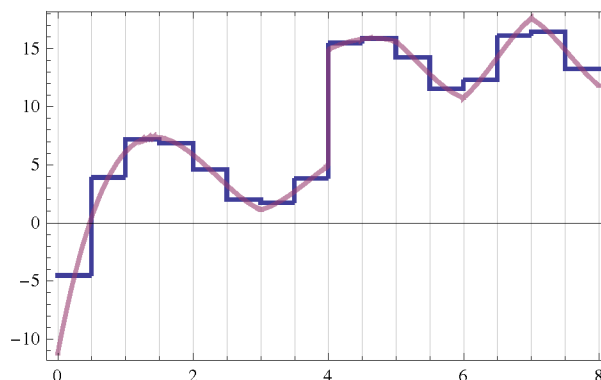
$$= \frac{1}{2^n} \frac{(1 - e^{-2\pi i \nu})}{(1 - e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^n}})} = \frac{(1 - e^{-2\pi i \nu})}{2\pi i \nu - (-2\pi i)^2 \frac{\nu^2}{2^n} + \dots}$$

◊ Conclui-se assim que

$$\Phi_{Haar}(\nu) = \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2\pi i \frac{\nu}{2^k}} \right) \right) = \frac{(1 - e^{-2\pi i \nu})}{2\pi i \nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \tag{334}$$

$$\phi_{Haar}(t) = \chi_{[0,1]}(t) \tag{335}$$

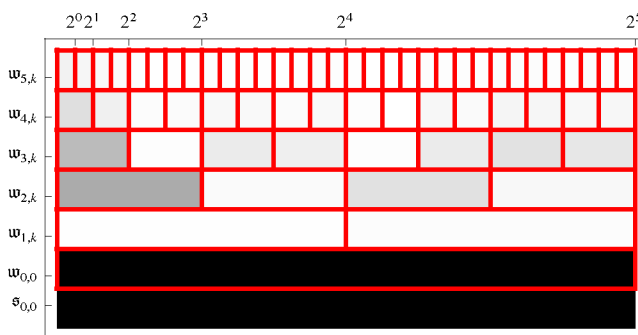
◊ A análise multi-resolução de Haar corresponde assim a considerar o espaço  $V_0$  como o espaço de funções constantes nos intervalos  $[k, k + 1]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , i.e funções em escada com patamares unitários. Sendo assim é evidente que  $V_1$  será o espaço de funções em escada com patamares em intervalos  $[k/2, (k + 1)/2]$  o que inclui todas as funções de  $V_0$  como esperado.



■ Transformada de onduletas de Haar

|        |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|--|--|
| -2.36  | -1.76 | -1.23 | -0.77 | -0.38 | -0.06 | 0.18  | 0.35  | 0.45  | 0.48 | 0.43 | 0.32 | -0.22 | -0.34 | -0.40 | -0.40 | -0.20 | -0.12 | -0.02 | 0.09 | 0.49 | 0.51 | 0.45 | 0.28 | -0.55 | -0.68 | -0.67 | -0.52 | 0.40 | 0.56 | 0.59 | 0.50 |  |  |
| -5.81  | -2.81 | -0.61 | 0.77  | 1.33  | 1.08  | -0.80 | -1.14 | -0.45 | 0.09 | 1.43 | 1.05 | -1.77 | -1.71 | 1.37  | 1.57  |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
| -12.00 | 0.36  | 3.54  | -2.87 | -0.52 | 3.69  | -5.18 | 4.40  |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
| -14.90 | 1.04  | 5.40  | -1.25 |       |       |       |       |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
| 0.32   | -0.67 |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
| -45.10 |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |
| 70.10  |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |       |      |      |      |      |  |  |

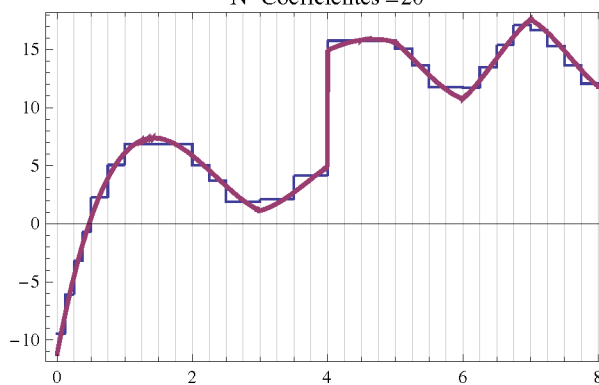
■ Diagrama no espaço de Fases



■ Compressão da Transformada de Onduleta

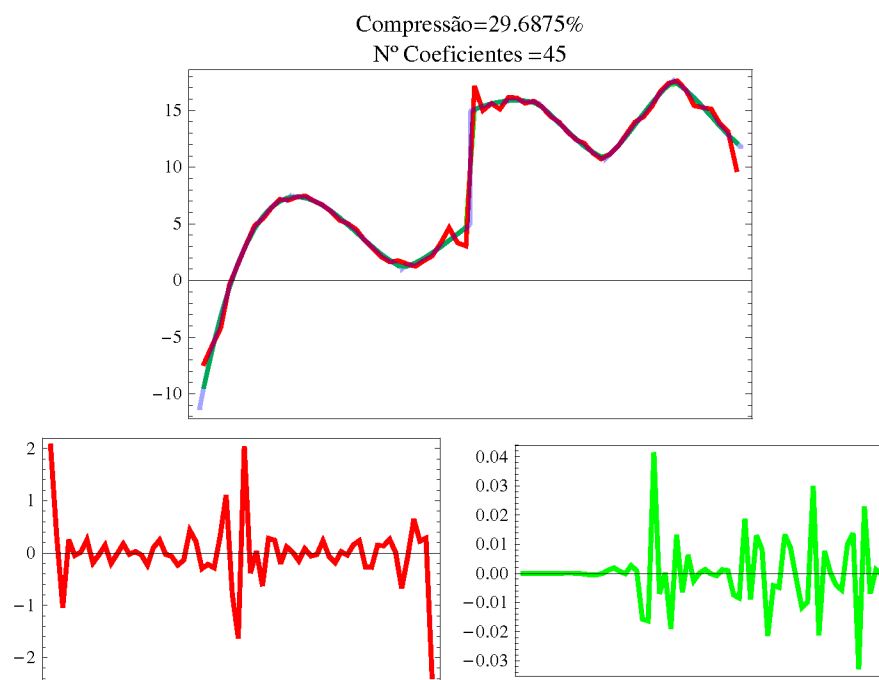
|        |       |      |       |      |      |       |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
|--------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|--|
| -2.36  | -1.76 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |  |  |
| -5.81  | -2.81 | 0.00 | 0.00  | 1.33 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.43 | 0.00 | -1.77 | -1.71 | 1.37 | 1.57 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
| -12.00 | 0.00  | 3.54 | -2.87 | 0.00 | 3.69 | -5.18 | 4.40 |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
| -14.90 | 0.00  | 5.40 | 0.00  |      |      |       |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
| 0.00   | 0.00  |      |       |      |      |       |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
| -45.10 |       |      |       |      |      |       |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |
| 70.10  |       |      |       |      |      |       |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |  |  |

Compressão=68.75%  
N° Coeficientes =20



◇ Usando Daubechies  $D_4$  e comparando com Fourier com o mesmo número de coeficientes.

|      |      |      |      |     |      |     |      |     |      |     |     |     |     |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |  |
|------|------|------|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|--|
| -0.7 | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0 | 0.0  | 0.0 | 0.0  | 0.0 | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.8 | -1.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |  |  |
| -1.1 | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0 | 0.0  | 0.0 | -1.2 | 5.6 | -1.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |  |
| -2.7 | 0.0  | 0.0  | -2.6 | 7.4 | -2.8 | 0.0 | 1.4  |     |      |     |     |     |     |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |  |
| -7.6 | -4.4 | 14.3 | -0.9 |     |      |     |      |     |      |     |     |     |     |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |  |
| 17.6 | 51.4 | 64.5 | 60.5 |     |      |     |      |     |      |     |     |     |     |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |  |



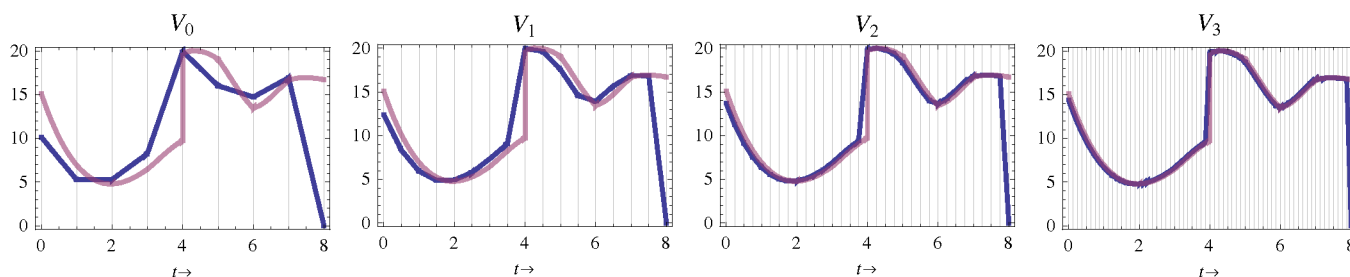
Erro nas aproximações de Fourier e Onduleta com a mesma compressão.

• **Multiresolução com onduletas de Schauder**

◊ Com a utilização de funções triangulares  $\beta_1(t)$  e suas transladadas como base de  $V_0$ ,

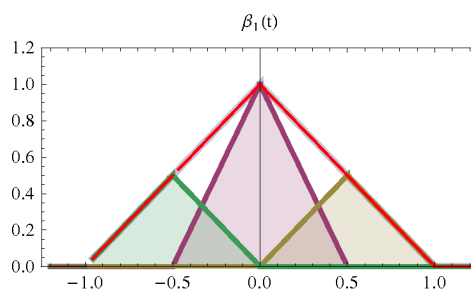
$$\beta_1(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{False} \end{cases} \tag{336}$$

◊ o espaço  $V_0$  é o espaço de funções lineares no intervalos unitários  $[k, k + 1]$ , e  $V_j$  o espaço de funções sectionalmente lineares nos intervalos  $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$ .



◊ Equação de dilatação

$$\beta_1(t) = \frac{1}{2} \beta_1(2t + 1) + \beta_1(2t) + \frac{1}{2} \beta_1(2t - 1) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \beta_1(2t - k) \tag{337}$$



■ **Multiresolução com funções de escala do tipo Spline (Battle-Lemarié)**

- ◊ A análise multi-resolução com onduletas de Haar ou Schauder são casos particulares da multi-resolução por splines  $S_m$  de ordem  $m$ . Neste caso o espaço  $V_0$  consiste em todas as funções  $f(t)$  com suporte em  $[k, k + 1[$  que são polinómios de grau igual ou inferior a  $m$  e que têm  $m - 1$  derivadas contínuas. Uma base deste espaço  $V_0$  consiste em splines de ordem  $m$ , definidas como a convolução da função característica do intervalo  $[0, 1]$  consigo própria  $m + 1$  vezes e centradas em  $t = 1/2$  para  $m$  par e em  $t = 0$  para  $m$  ímpar.

$$S_{2m}(t) = \frac{\chi_{[0,1]} \star \chi_{[0,1]} \star \dots \star \chi_{[0,1]}}{2^{m+1}} \tag{338}$$

$$S_{2m+1}(t) = \frac{\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \star \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \star \dots \star \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}}{2^{m+2}} \tag{339}$$

- ◊ Uma vez que a transformada de Fourier converte convolução em produto, e  $\mathcal{F}_\nu(\chi_{[0,1]}) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} e^{-i \pi \nu}$  ou  $\mathcal{F}_\nu(\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu}$ , obtemos para cada  $m$  uma base de Riez de funções de escala não-ortogonais cujas transformadas de Fourier são

$$\Phi_m(\nu) = \left( \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \right)^{m+1} e^{-i \pi \nu \delta} \tag{340}$$

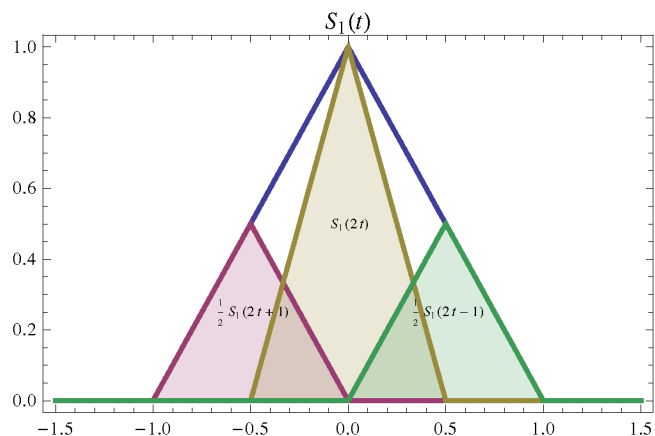
onde  $\delta = 1$  para  $m$  par e  $\delta = 0$  para  $m$  ímpar.

- ◊ As funções assim obtidas podem igualmente ser calculadas directamente, obtendo-se

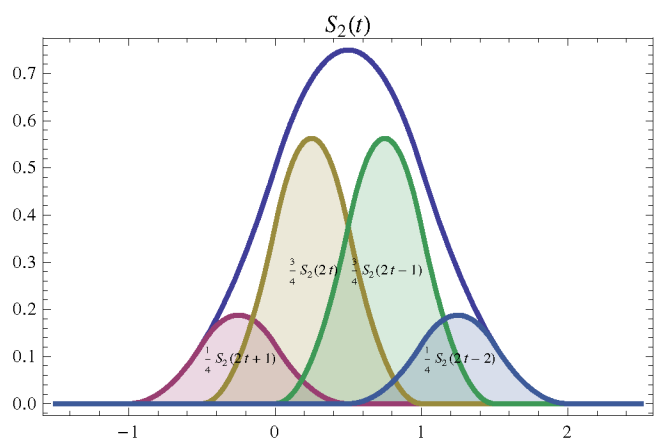
$$S_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \text{Max}[0, t + \frac{m}{2} - j]^m & \text{Even}Q[m] \\ \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} \text{Max}[0, t + \frac{m+1}{2} - j]^m & \text{Odd}Q[m] \end{cases} \tag{341}$$

■ **Equação de Dilatação para Splines de ordem  $m$**

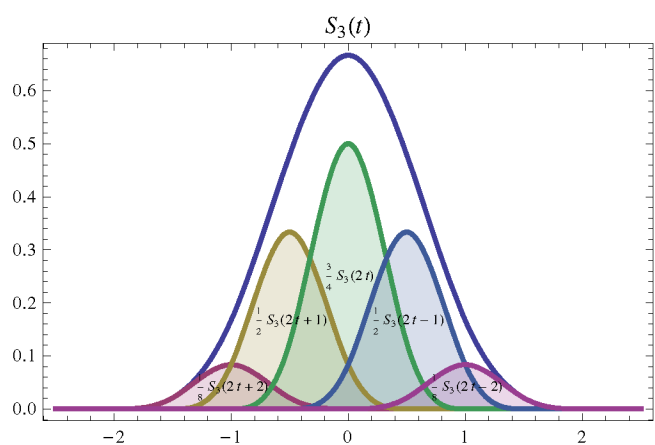
$$S_m(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=-\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^{m+1-\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \binom{m+1}{k + \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} S_m(2t - k) \tag{342}$$



$$S_1(t) = \frac{1}{2} S_1(2t + 1) + 1 S_1(2t) + \frac{1}{2} S_1(2t - 1)$$



$$S_2(t) = \frac{1}{4} S_2(2t + 1) + \frac{3}{4} S_2(2t) + \frac{3}{4} S_2(2t - 1) + \frac{1}{4} S_2(2t - 2)$$



$$S_3(t) = \frac{1}{8} S_3(2t + 2) + \frac{1}{2} S_3(2t + 1) + \frac{3}{4} S_3(2t) + \frac{1}{2} S_3(2t - 1) + \frac{1}{8} S_3(2t - 2)$$

■ Ortonormalização da base de Splines

- ◇ A partir de uma base de Riesz  $\phi_{no}$  não-ortonormalizada de  $V_0$  é sempre possível construir uma base ortonormal a partir da sua transformada de Fourier

$$\Phi(v) = \frac{\Phi_{no}(v)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi_{no}(v+k)|^2}} \tag{343}$$

- ◇ No caso das splines esta normalização transforma a base  $S_m$ , que originalmente tem suporte compacto, numa base de funções de suporte infinito, embora o decaimento seja rápido.
- ◇ Com a função  $\Phi_m(v) = \left(\frac{\sin(\pi v)}{\pi v}\right)^{m+1} e^{-i\pi v \delta} = \mathcal{F}_v(S_m)$  a soma no denominador pode ser calculada explicitamente, usando a expressão

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi_m(\nu + k)|^2 = \left( \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi} \right)^{2(m+1)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\nu + k)^{2(m+1)}} \quad (344)$$

◇ Para  $m = 0$  o somatório é

$$\Sigma_0(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\nu + k)^2} = \pi^2 \operatorname{Csc}[\pi \nu]^2 \quad (345)$$

◇ Para  $m$  arbitrário

$$\Sigma_m(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\nu + k)^{2(m+1)}} = \frac{1}{(2m+1)!} \frac{d^{2m}}{d\nu^{2m}} (\pi^2 \operatorname{Csc}[\pi \nu]^2) \quad (346)$$

◇ A base de splines ortogonalizada de ordem  $m$  é assim obtida de

$$\Phi(\nu) = \frac{\Phi_m(\nu)}{\sqrt{\left( \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi} \right)^{2(m+1)} \Sigma_m(\nu)}} = M(\nu) \Phi_m(\nu) \quad (348)$$

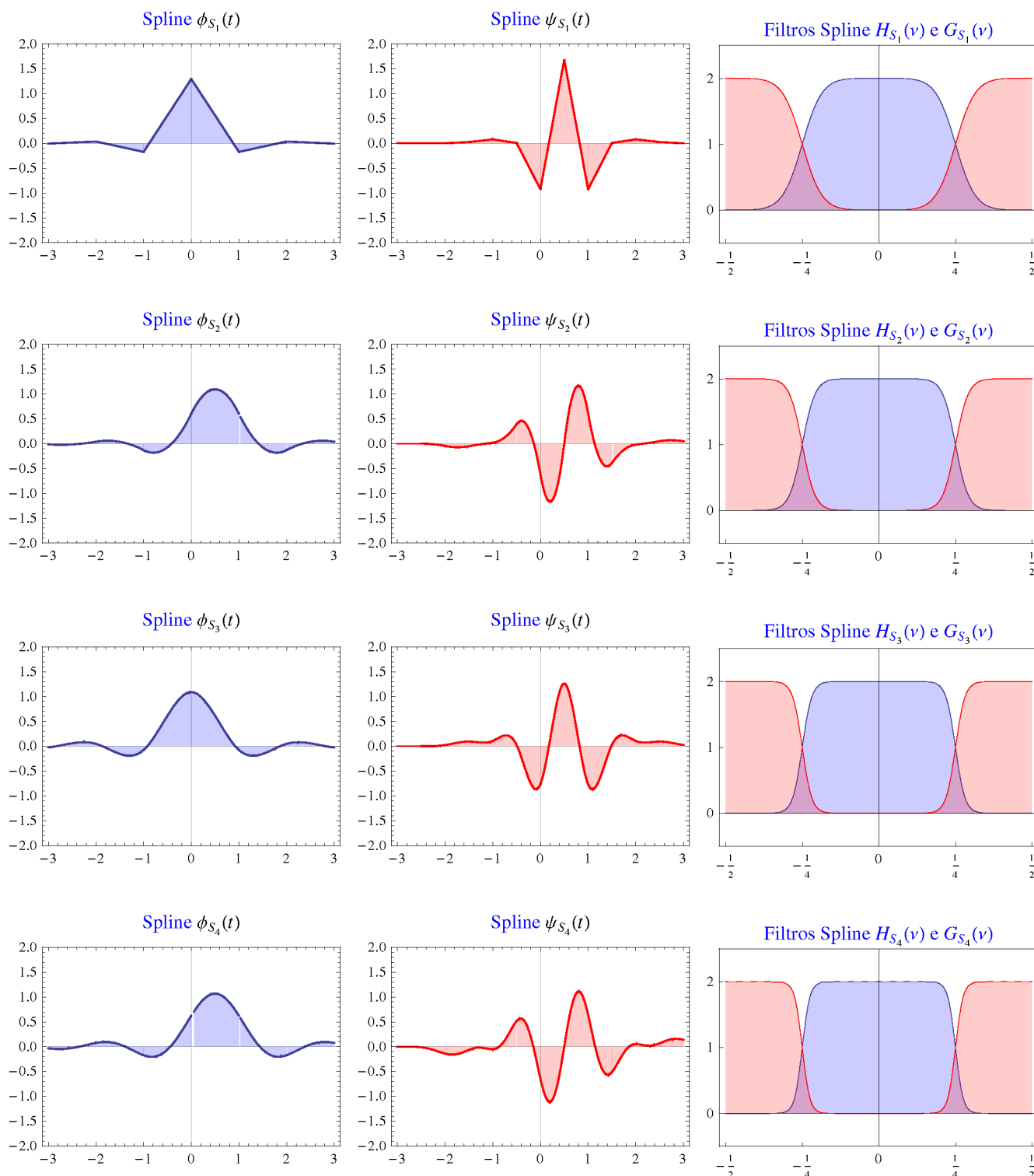
◇ A decomposição de  $M(\nu)$  em termos duma série de Fourier com coeficientes  $c_k$

$$M(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi} \right)^{2(m+1)} \Sigma_m(\nu)}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \nu k} \quad (349)$$

◇ permite escrever directamente a função de escala ortonormada de Spline de ordem  $m$  como a convolução

$$\phi_{S_m}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k S_m(t - k) \quad (350)$$

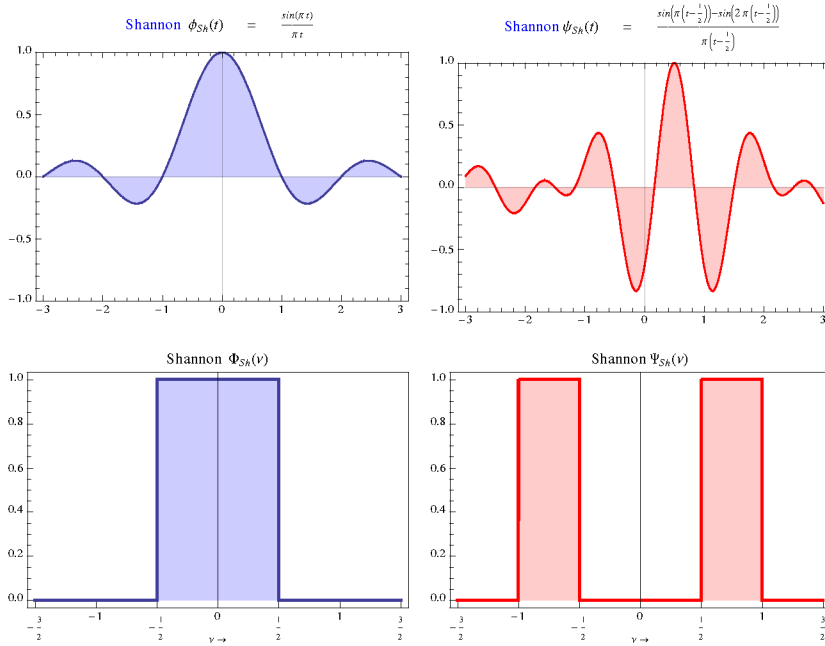




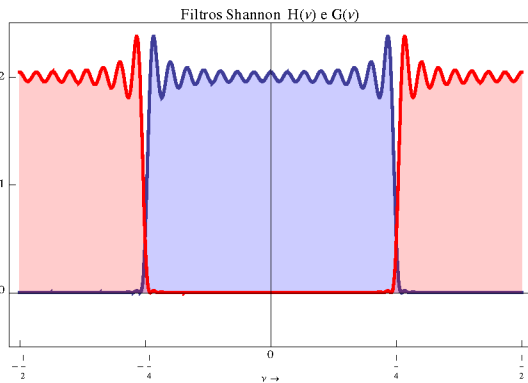
Onduletas de Battle-Lemarié e respectivas funções de escala e filtros simétricos em quadratura  $H(\nu)$  e  $G(\nu)$  calculados com 20 coeficientes. Note que estas onduletas não têm suporte compacto embora as splines que lhes dão origem tenham, devido ao factor de normalização que é necessário introduzir no espaço de Fourier.

■ Onduletas de Shannon

◇ As funções de escala e onduletas de Shannon são obtidas a partir das suas transformadas de Fourier, que neste caso representam filtros ideais passa-baixos e passa-banda.



◇ Filtros  $H(v)$  e  $G(v)$  de Shannon calculados com 30 coeficientes.



■ Onduletas de Daubechies

■ No caso de Daubechies a condição de ortogonalidade

$$|H(v)|^2 + \left| H\left(v - \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 2 \tag{351}$$

Juntamente com a condição de anulamento de  $p$  momentos

$$\left. \frac{d^k \Psi(v)}{dv^k} \right|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k \psi(t) dt = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \tag{352}$$

■ A equação de Onduleta na sua forma dual é, uma vez que  $G(v) = e^{-2\pi i(v+\frac{1}{2})} H^*(v + \frac{1}{2})$

$$\Psi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} G\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{\nu+1}{2}} H^*\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (353)$$

- Conclui-se assim que se deve ter, dado que  $\Psi(0) \propto H^*(1/2)$  e  $\Phi(0) \neq 0$

$$\left. \frac{d^k H(\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=1/2} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \quad (354)$$

- O filtro  $H(\nu)$  deve assim ter a forma, com  $L(\nu)$  um polinómio.

$$H(\nu) = \left( \frac{1 + e^{2\pi i \nu}}{2} \right)^p L(\nu) \quad (355)$$

- O seu quadrado  $|H(\nu)|^2$  é uma função par e deve ser um polinómio em  $\cos(2\pi \nu)$ . Definindo  $P(\nu) = |L(\nu)|^2$  obtemos

$$|H(\nu)|^2 = 2 \left( 1 - \sin\left[2\pi \frac{\nu}{2}\right]^2 \right)^p P\left(\sin\left[2\pi \frac{\nu}{2}\right]^2\right) \quad (356)$$

- Usando a variável  $y = \sin\left[2\pi \frac{\nu}{2}\right]^2$  a condição de ortogonalidade escreve-se

$$(1-y)^p P(y) + y^p P(1-y) = 1 \quad (357)$$

- Devido a um teorema de Bezout, o polinómio  $P(y)$  tem grau mínimo  $p-1$ , e a expansão em série de Taylor de  $(1-y)^{-p}$  determina-o

$$P(y) = \frac{1}{(1-y)^p} (1-y^p P(1-y)) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{k+p-1}{k} y^k \geq 0 \quad (358)$$

- A factorização espectral de  $|H(\nu)|^2 = 2(1-y)^p P(y)$  permite determinar  $H(\nu)$  por determinação dos zeros de  $P(y)$  estendendo ao plano complexo. Usando a notação  $z = e^{i\nu}$  obtemos

$$y = \sin\left[\frac{\nu}{2}\right]^2 = \frac{1}{2} - \frac{z+z^{-1}}{4} = -\frac{(z-1)^2}{4z} \quad (359)$$

- ◇ Como  $P(y)$  é um polinómio de grau  $p-1$  em  $y$  devemos procurar as  $2(p-1)$  raízes  $z_j$  do polinómio

$$z^{p-1} P\left(-\frac{(z-1)^2}{4z}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{k+p-1}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k (z-1)^{2k} z^{p-1-k} = \alpha \prod_{j=1}^{2(p-1)} (z-z_j) \quad (360)$$

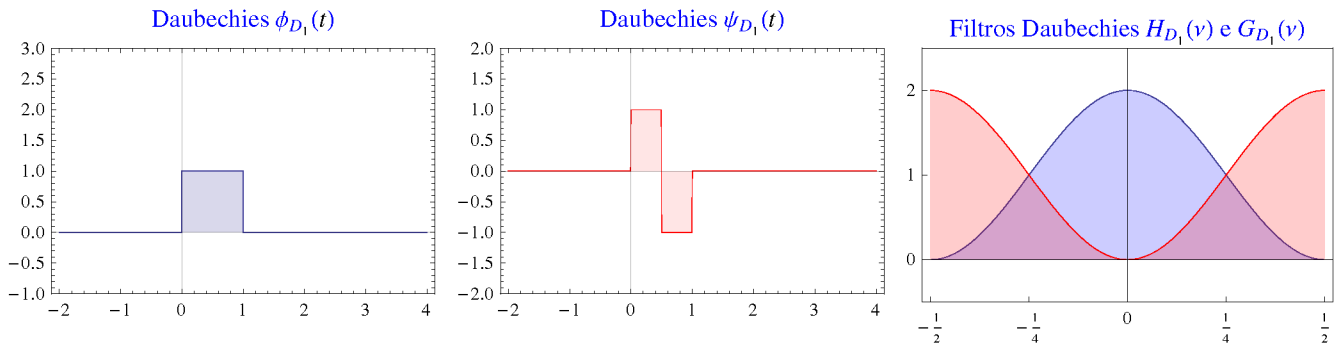
- ◇ Poderemos assim escrever

$$z^{p-1} P\left(-\frac{(z-1)^2}{4z}\right) = \alpha \prod_j |(z-z_j)(z-\bar{z}_j)|^2 \prod_k |(z-e^{i\alpha_k})(z-e^{-i\alpha_k})|^2 \prod_n |(z-\rho_n)|^2 \quad (361)$$

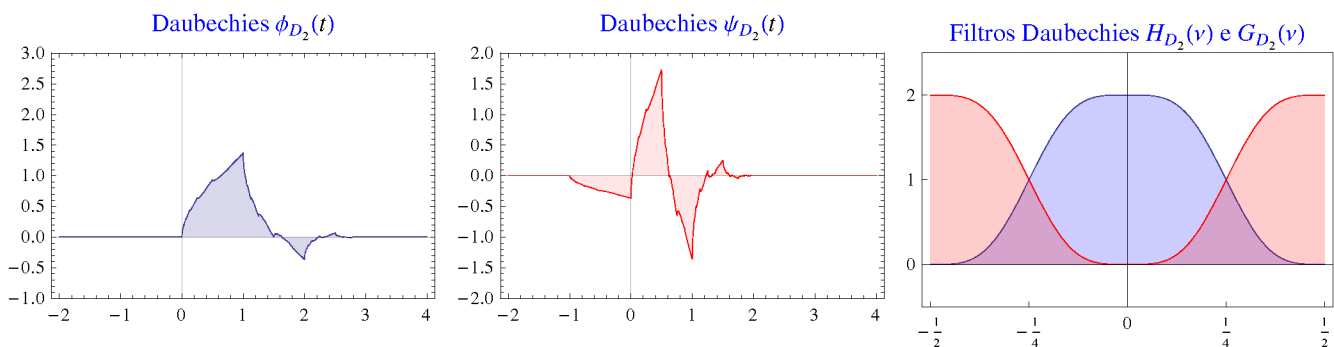
- De facto uma vez que  $P\left(-\frac{(z-1)^2}{4z}\right) = P\left(\frac{1}{2} - \frac{z+z^{-1}}{4}\right)$  é evidente que se  $z_j$  é uma raiz então também  $z_j^{-1}$  o é. Assim basta escolher as raízes com módulo inferior à unidade.

- Os coeficientes  $h_k$  de Daubechies são os coeficientes das diferentes potências de  $z$  no polinómio  $Q(z)$  que é a raiz quadrada de  $z^{p-1} P\left(-\frac{(z-1)^2}{4z}\right)$ . Estes devem ser normalizados de forma que  $\sum h_k = \sqrt{2}$ .

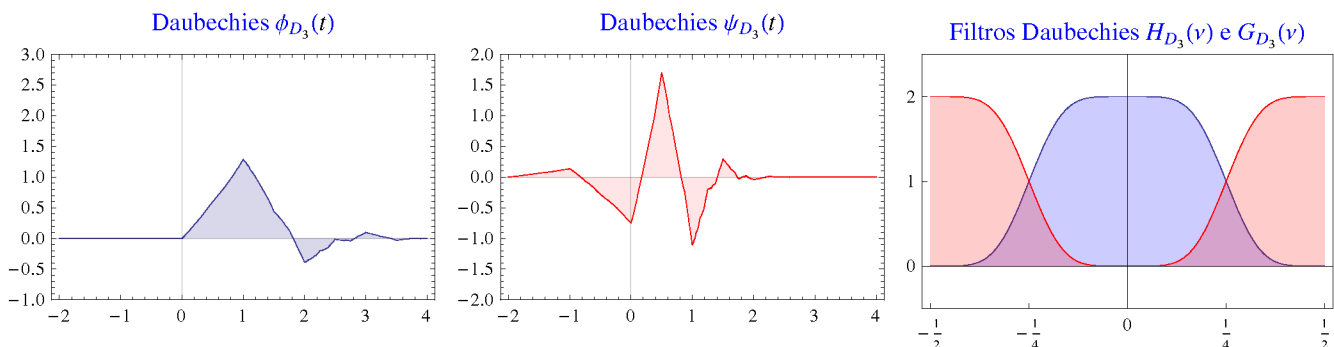
$h_0 = 0.70711$     $h_1 = 0.70711$



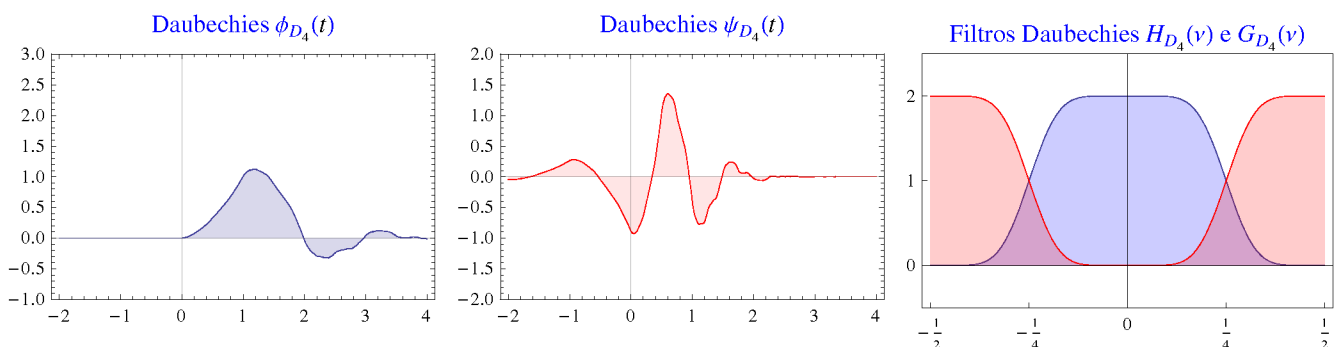
$h_0 = 0.48296$     $h_1 = 0.83652$     $h_2 = 0.22414$     $h_3 = -0.12941$



$h_0 = 0.33267$     $h_1 = 0.80689$     $h_2 = 0.45988$     $h_3 = -0.13501$     $h_4 = -0.08544$     $h_5 = 0.03523$



$h_0 = 0.23038$     $h_1 = 0.71485$     $h_2 = 0.63088$     $h_3 = -0.02798$     $h_4 = -0.18703$     $h_5 = 0.03084$     $h_6 = 0.03288$     $h_7 = -0.01060$

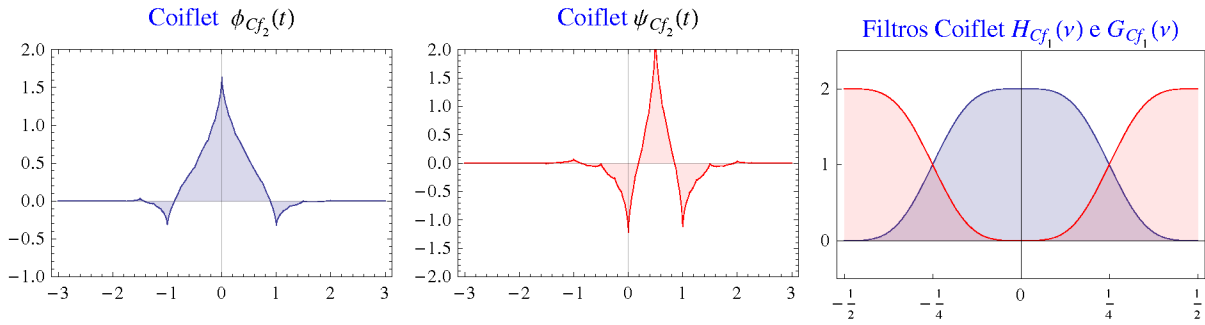


## ■ Onduletas de Coifmann

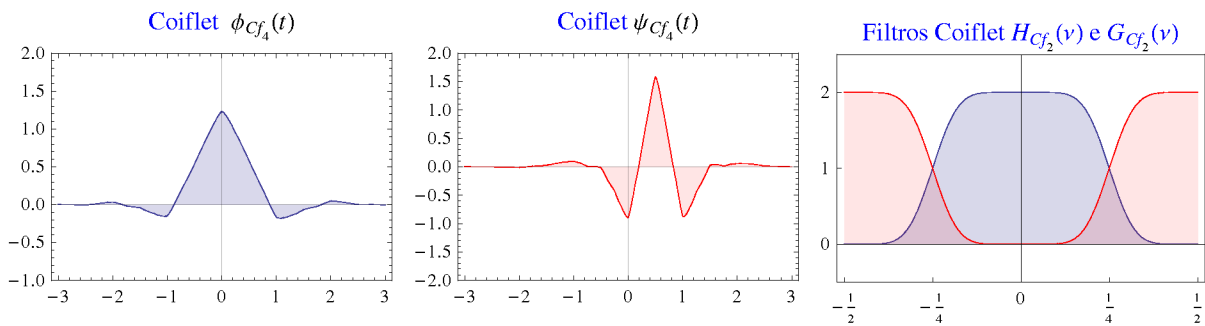
- Adicionalmente escolhe-se uma função de escala cujos primeiros  $p$  momentos também são nulos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0 \quad m = 1, 2, \dots, p-1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^m \phi(t) dt = 0 \quad m = 1, 2, \dots, p-1$$
(362)

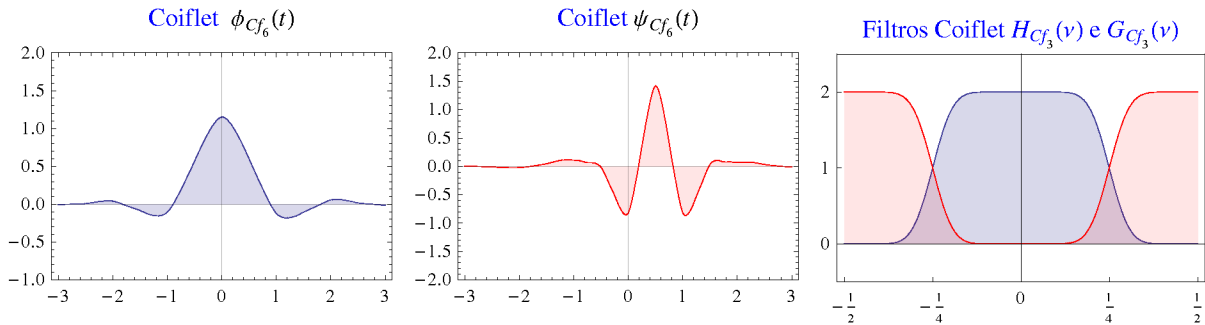
|                     |                    |                 |                 |                  |                  |  |  |
|---------------------|--------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|--|--|
| $h_{-2} = -0.07273$ | $h_{-1} = 0.33790$ | $h_0 = 0.85257$ | $h_1 = 0.38486$ | $h_2 = -0.07273$ | $h_3 = -0.01566$ |  |  |
|---------------------|--------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|--|--|



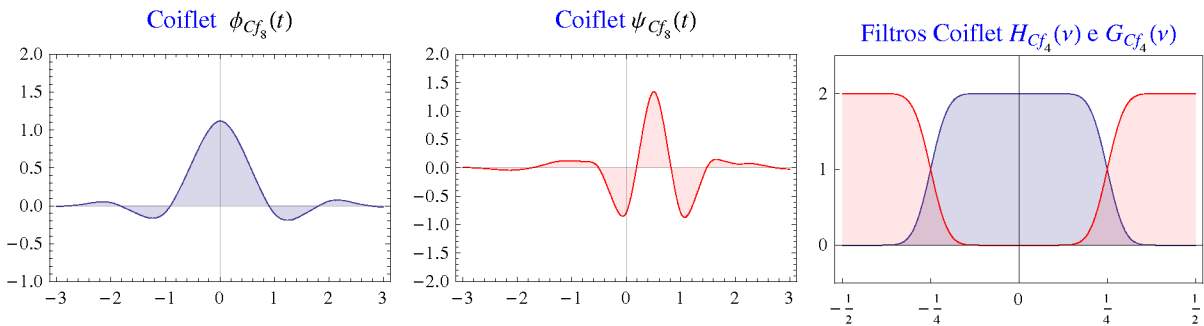
|                    |                     |                     |                    |                 |                 |                  |                  |                 |
|--------------------|---------------------|---------------------|--------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| $h_{-4} = 0.01639$ | $h_{-3} = -0.04146$ | $h_{-2} = -0.06737$ | $h_{-1} = 0.38611$ | $h_0 = 0.81272$ | $h_1 = 0.41701$ | $h_2 = -0.07649$ | $h_3 = -0.05943$ | $h_4 = 0.02368$ |
| $h_5 = 0.00561$    | $h_6 = -0.00182$    | $h_7 = -0.00072$    |                    |                 |                 |                  |                  |                 |



|                     |                    |                    |                     |                     |                    |                 |                     |                     |
|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|--------------------|-----------------|---------------------|---------------------|
| $h_{-6} = -0.00379$ | $h_{-5} = 0.00778$ | $h_{-4} = 0.02345$ | $h_{-3} = -0.06577$ | $h_{-2} = -0.06112$ | $h_{-1} = 0.40518$ | $h_0 = 0.79378$ | $h_1 = 0.42848$     | $h_2 = -0.07180$    |
| $h_3 = -0.08230$    | $h_4 = 0.03456$    | $h_5 = 0.01588$    | $h_6 = -0.00901$    | $h_7 = -0.00257$    | $h_8 = 0.00112$    | $h_9 = 0.00047$ | $h_{10} = -0.00007$ | $h_{11} = -0.00003$ |



|                     |                     |                     |                    |                                    |                                    |                     |                    |                 |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|------------------------------------|------------------------------------|---------------------|--------------------|-----------------|
| $h_{-8} = 0.00089$  | $h_{-7} = -0.00163$ | $h_{-6} = -0.00735$ | $h_{-5} = 0.01607$ | $h_{-4} = 0.02668$                 | $h_{-3} = -0.08127$                | $h_{-2} = -0.05608$ | $h_{-1} = 0.41531$ | $h_0 = 0.78224$ |
| $h_1 = 0.43439$     | $h_2 = -0.06663$    | $h_3 = -0.09622$    | $h_4 = 0.03933$    | $h_5 = 0.02508$                    | $h_6 = -0.01521$                   | $h_7 = -0.00566$    | $h_8 = 0.00375$    | $h_9 = 0.00127$ |
| $h_{10} = -0.00059$ | $h_{11} = -0.00026$ | $h_{12} = 0.00006$  | $h_{13} = 0.00003$ | $h_{14} = -3.25960 \times 10^{-6}$ | $h_{15} = -1.78500 \times 10^{-6}$ |                     |                    |                 |



## Multiresolução com pacotes de onduletas

- Vimos anteriormente que uma análise multiresolução se baseia na análise e síntese de aproximações sucessivas dum sinal com base numa decomposição

$$L_2(\mathbb{R}) = V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \dots \quad (363)$$

- ◇ Na prática, o que temos numa DTWT é uma aproximação de ordem  $J$  de  $f(t)$ , i.e.  $f_J(t) \in V_J$  e sucessivas decomposições mostram que podemos fazer

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1} = V_{J-2} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} = \dots = V_L \oplus W_{L+1} \oplus \dots \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} \quad (364)$$

- ◇ De acordo com as equações de Dilatação (XXX) e Onduletas (XXX) a decomposição  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  resulta de escrever as bases de  $V_0$  e  $W_0$  em termos da base de  $V_1$  formada por  $\phi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \phi(2t - k)$ .

$$\varphi_0(t) = \phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \in V_0 \quad (365)$$

$$\varphi_1(t) = \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \in W_0$$

- ◇ Podemos usar o mesmo princípio para decompor os espaço  $W_1$  numa soma directa  $W_1 = W_{0,2} \oplus W_{0,3}$  usando agora equações do tipo

$$\varphi_2(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \psi(2t - k) \in W_{0,0} \quad (366)$$

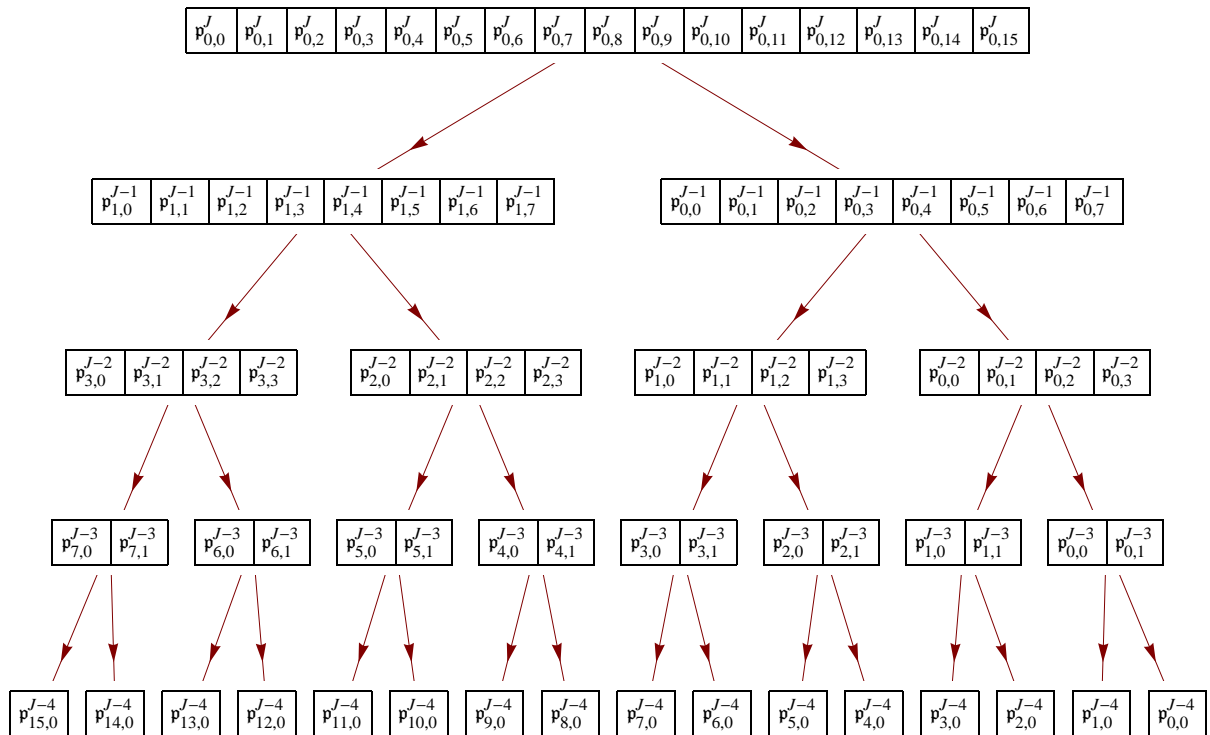
$$\varphi_3(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \psi(2t - k) \in W_{0,1}$$

- ◇ Assim, iterando este processo em geral obtemos mais bases para decompor  $V_1$  e  $W_1$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{n/2}(2t - k) & \text{para } n \text{ par com } \varphi_0(t) = \phi(t) \\ \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{(n-1)/2}(2t - k) & \text{para } n \text{ impar com } \varphi_1(t) = \psi(t) \end{cases} \quad (367)$$

- ◇ Para  $n = 0$ ,  $\varphi_0(t - k)$  é uma base de  $V_0$ ,  $n = 1$  e  $\varphi_1(t - k)$  é uma base de  $W_0$ . Usando a notação usual  $\varphi_{n,j,k}(t) = \sqrt{2^j} \varphi_n(2^j t - k)$  podemos igualmente deduzir que  $\varphi_{0,j,k}$  é uma base de  $V_j = W_{j,0}$ ,  $\varphi_{1,j,k}$  uma base de  $W_j = W_{j,1}$ , e  $\varphi_{n,j,k}$  uma base de  $W_{j,n}$  resultante da decomposição de  $W_{j+1} = W_{j,2} \oplus W_{j,3} \oplus \dots \oplus W_{j,n}$ . Assim começando numa resolução  $V_J$  podemos construir a pirâmide

$$\begin{matrix} W_{J,0} \\ W_{J-1,0} & W_{J-1} \\ W_{J-2,0} & W_{J-2,1} & W_{J-2,2} & W_{J-2,3} \\ W_{J-3,0} & W_{J-3,1} & W_{J-3,2} & W_{J-3,3} & W_{J-3,4} & W_{J-3,5} & W_{J-3,6} & W_{J-3,7} \end{matrix} \quad (368)$$

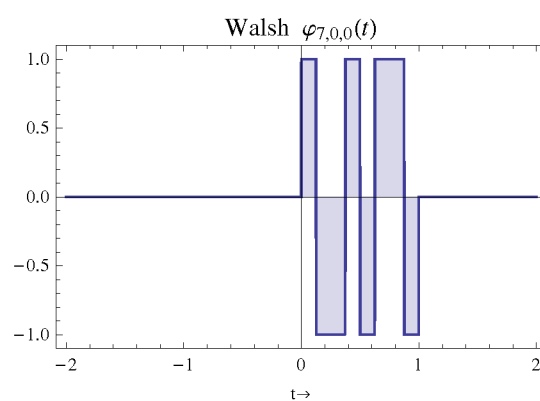
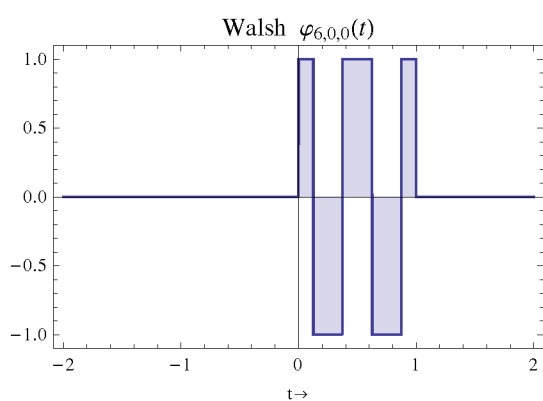
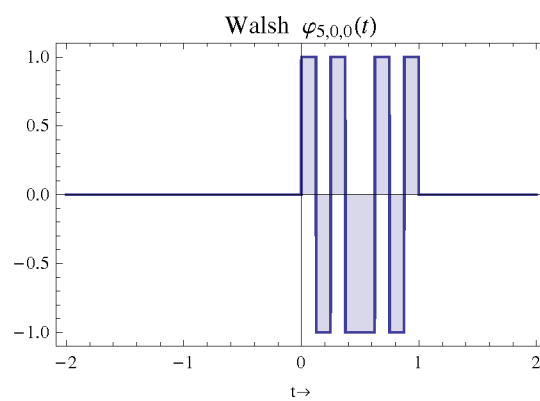
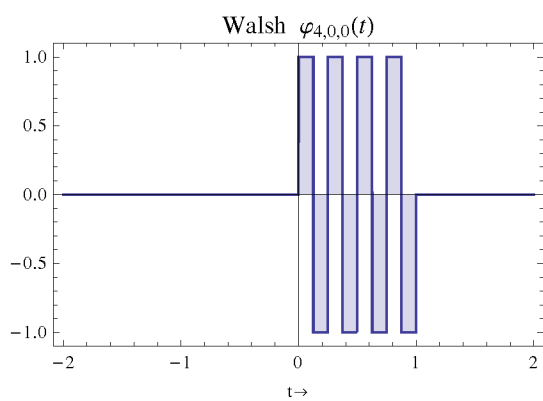
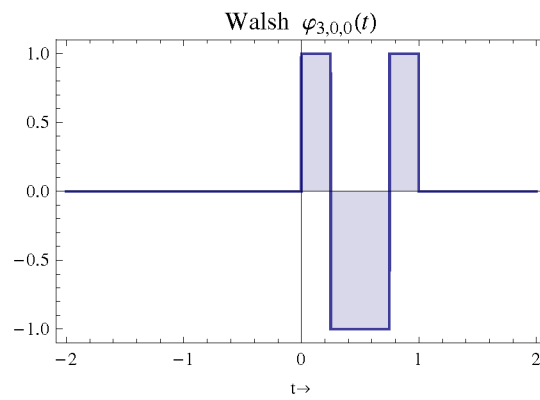
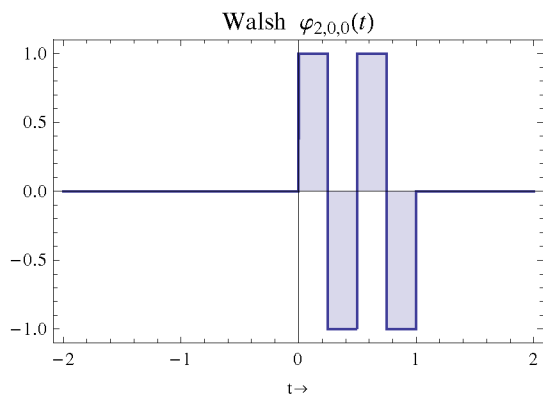
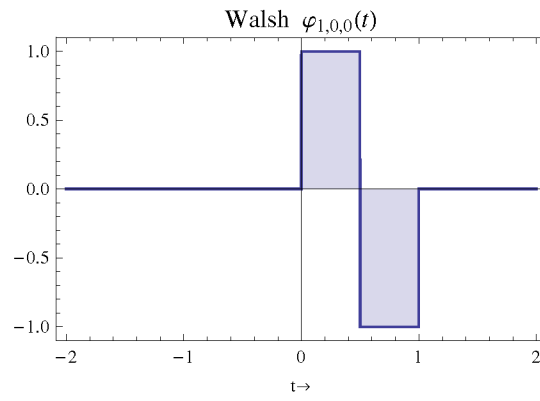
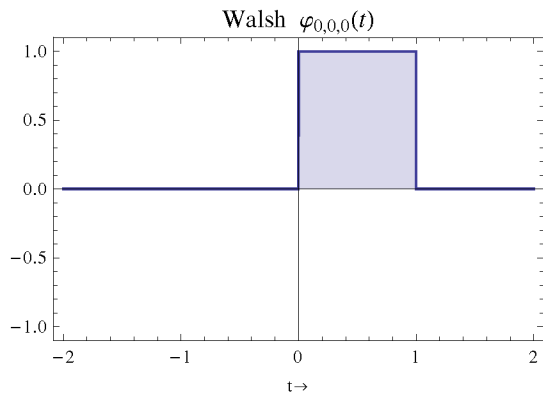


■ Bases de Walsh

- No caso de Haar os coeficientes são  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$  pelo que  $g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  donde

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(t) &= \varphi_n(2t) + \varphi_n(2t-1) \\ \varphi_{2n+1}(t) &= \varphi_n(2t) - \varphi_n(2t-1) \end{aligned} \tag{369}$$





## ■ Pacotes de Daubechies

◇ Usando os filtros  $h_k$  associados às diferentes funções de Daubechies podemos construir bases de pacotes de onduletas associadas a cada  $D_m$ .

