

■ Transformada discreta de onduleta (DWT)

- Devido à sua grande redundância, e para efeitos de cálculo, a transformada continua de onduletas pode ser discretizada restringindo os valores de $\{a, b\}$ a pontos de um reticulado discreto. O mais vulgar é fazer a escolha diádica $\{a, b\} = \{2^{-j}, 2^{-j}k\}$ com $\{j, k\} \in \mathbb{Z}^2$.

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \tag{246}$$

- ◇ A representação em onduletas passa agora a ser descrita por um conjunto numerável de coeficientes

$$w_{j,k}(f) = \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*(2^j t - k) dt \tag{247}$$

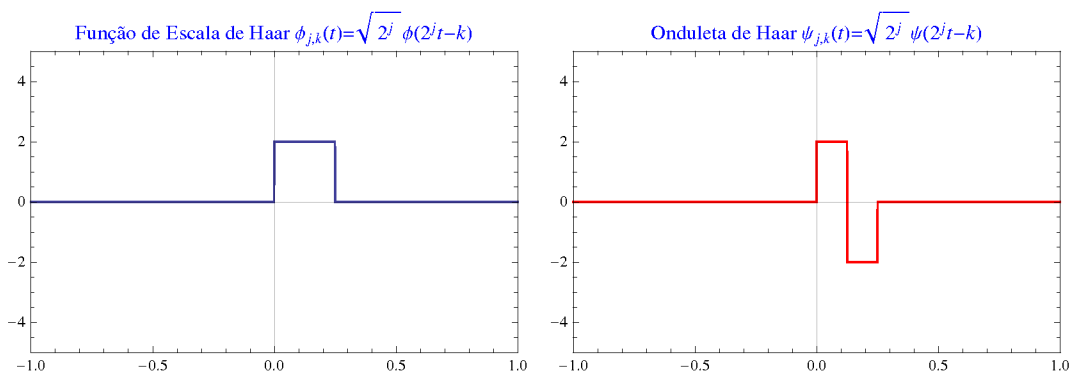
- ◇ Com esta escolha a fórmula de reconstrução resulta numa síntese com um conjunto dual $\tilde{\psi}_{j,k}$ de $\psi_{j,k}$ que forme um **frame** adequado, não necessariamente ortonormado:

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} w_{j,k}(f) \tilde{\psi}_{j,k}(t) \tag{248}$$

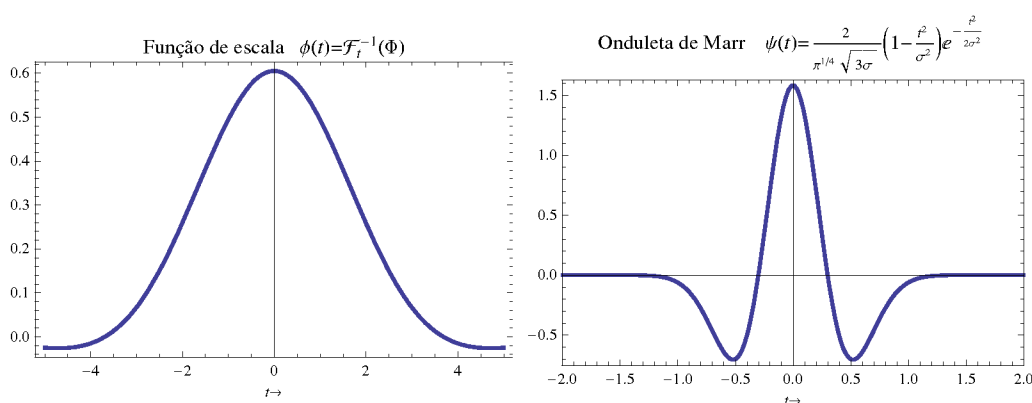
- ◇ Com onduletas ortonormadas $\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ a relação anterior poderia ser rescrita com $\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \psi_{j,k}(t)$ desde que se verifique a condição

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}^*(\tau) = \delta(t - \tau) \tag{249}$$

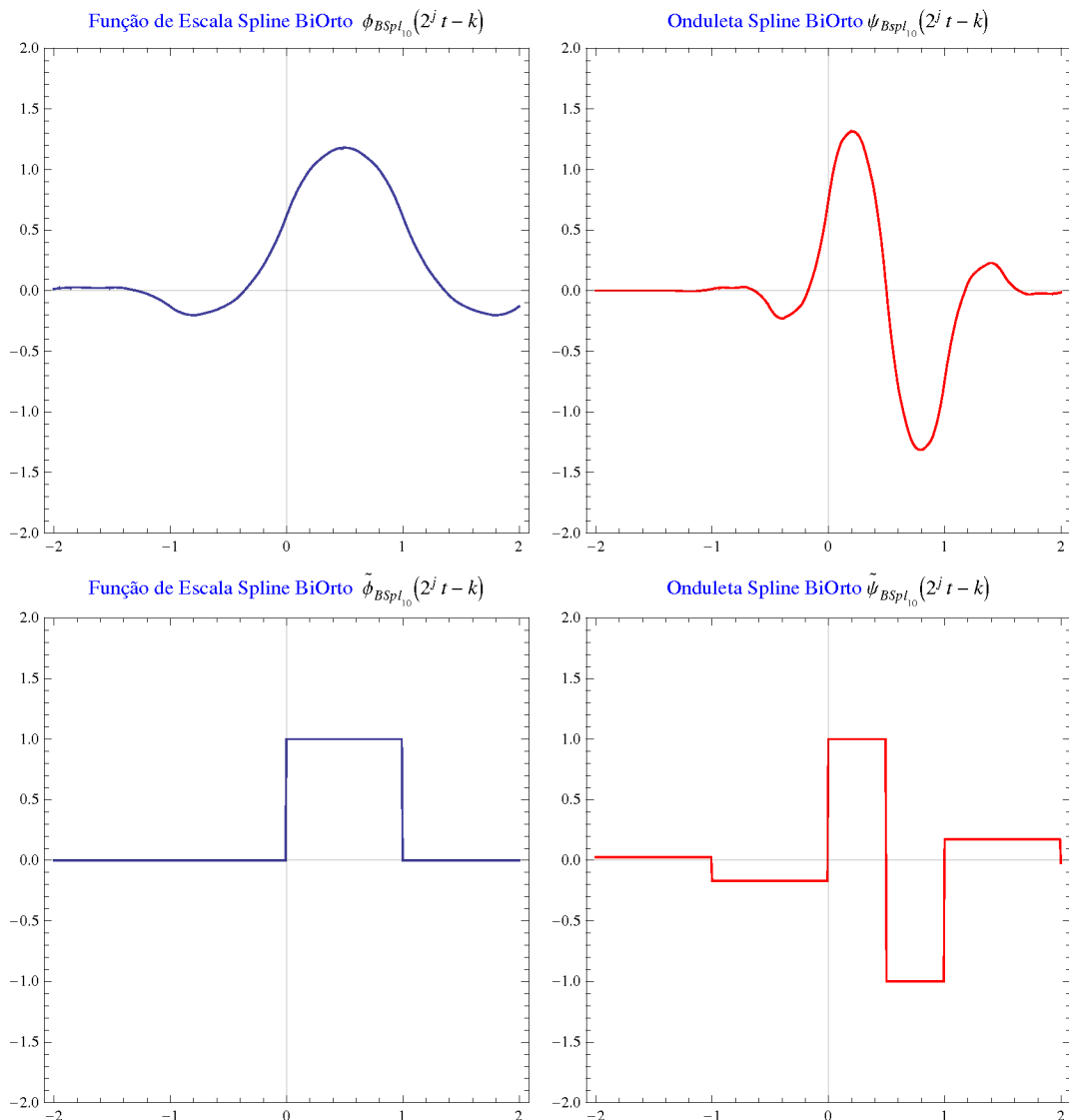
- ◇ O exemplo mais simples destas onduletas é a de Haar.



- ◇ Onduleta de Marr/Chapéu Mexicano/LOG



- ◇ Exemplo Morlet
- ◇ Onduletas Spline Bi-Ortogonais



- Note-se que em toda a teoria anterior de transformadas contínuas de onduletas não existe nenhum requerimento de ortogonalidade para a análise ou síntese, apenas as condições de admissibilidade e de **frames** no caso discreto são necessárias. A utilização de sistemas de bases ortonormadas de onduletas simplifica contudo os cálculos.

● **Exemplo (Mallat-"A Wavelet Tour of Signal Processing", p. 81)**

- ◇ Nesta imagem pode-se ver como a transformada real contínua com a onduleta de Marr permite localizar com precisão as descontinuidades ou picos num sinal $f(t)$ já que os coeficientes de onduleta a escalas cada vez mais finas se tornam grandes em valor absoluto quando comparados com os seu vizinhos à mesma escala.

Transformada real com a onduleta de Marr/Chapéu Mexicano (preto=positivo, branco=negativo)

● **Exemplo (Addison,"The Illustrated Wavelet Transform Handbook", p. 20)**

- ◇ Nesta imagem a existência de janelas temporais com oscilações de frequência bem determinada aparecem no espaço de fase tempo-escala bem localizadas em tempo com em frequência, como se torna bem visível num gráfico de contornos de magnitude dos coeficientes.

● **Exemplo (Addison,"The Illustrated Wavelet Transform Handbook", p. 50)**

- ◇ Nesta imagem faz-se uma comparação entre os gráficos de fase duma transformada de onduleta de Morlet (CWT) e duma

transformada de Gabor (WFT) dum sinal harmónico com uma singularidade localizada num intervalo de tempo muito curto. Note-se a melhor localização tanto em tempo como em frequência da CWT de Morlet, mesmo com janelas de largura diferente.

Morlet CWT (frequência característica ν_c à direita é dobro da da esquerda) versus Gabor WFT (largura da janela a à direita o dobro da largura à esquerda)

■ **Análise Multiresolução**

- A análise multiresolução permite a construção de bases ortonormadas discretas de onduletas, e mesmo algumas delas com suporte compacto.
- Assumindo que conseguimos encontrar um conjunto discreto de onduletas $\psi_{j,k}(t)$ ortonormadas, a fórmula de reconstrução descreve a aproximação de $f(t)$ pelas suas representações $(\mathbf{w}_j f)(t)$ à escala $a = 2^{-j}$, obtidas somando nesta escala todas as contribuições para $k \in \mathbb{Z}$:

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathbf{w}_j f)(t) \tag{250}$$

$$(\mathbf{w}_j f)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

- ◇ O conjunto de todas as possíveis combinações lineares de onduletas $\psi_{j,k}(t)$ para j fixo é um subespaço de Hilbert $W_j \subset L_2(\mathbb{R})$ para o produto escalar

$$\langle \mathbf{w}_j f, \mathbf{w}_j g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}_{j,k}^* \mathbf{g}_{j,k} \tag{251}$$

- ◇ Com onduletas ortogonais, os subespaços W_j e W_i são ortogonais se $i \neq j$, e como todas as funções de $L_2(\mathbb{R})$ podem ser assim reconstruídas concluímos que

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \tag{252}$$

- ◇ Uma outra forma de decompor $L_2(\mathbb{R})$ consiste em acumular os subespaços W_i desde a escala mais grossa $a = 2^\infty$ até à escala $a = 2^{-j}$, i.e. construir os subespaços

$$V_j = \bigoplus_{i=-\infty}^{j-1} W_i = \dots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \tag{253}$$

- ◇ Os espaços V_j formam uma sequência de subespaços de dilatação $V_j \subset V_{j+1}$ o que significa que se $h_j(t) \in V_j$ então $h_j(2t) \in V_{j+1}$ e vice-versa.

Demonstração: _____

$$h_j(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} h_i(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_{i,k} \sqrt{2^i} \psi(2^i t - k) \in V_j$$

$$\tilde{h}(t) = h_j(2t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_{i,k} \sqrt{2^i} \psi(2^i \times 2t - k) =$$

$$= \sum_{i+1=-\infty}^{(j+1)-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{h_{i,k}}{\sqrt{2}} \sqrt{2^{i+1}} \psi(2^{i+1}t - k) = \sum_{i=-\infty}^j \tilde{h}_i(t) \in V_{j+1}$$

CQD

- ◇ Uma função $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ pode então ser sucessivamente aproximada com mais e mais detalhes à medida que $j \rightarrow \infty$ pelas suas somas parciais

$$(\mathfrak{S}_j f)(t) = \sum_{i=-\infty}^{j-1} (w_i f)(t) \in V_j \quad (254)$$

• **Exemplo (Mallat-"A Wavelet Tour of Signal Processing", p. 151)**

- ◇ Nesta figura um sinal $f(t)$ é decomposto nas suas componentes a diferentes escalas da transformada de ondulas mais a média à escala mais grossa.

• **Exemplo (Guo, "Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms-A Primer", p. 21-22)**

- ◇ Esta imagem mostra a relação entre as projecções dum sinal $f(t)$ nos diferentes espaços V_j e W_j para diferentes escalas $j = 0, \dots, 7$.

• **Exemplo (Guo, "Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms-A Primer", p. 24-25)**

- ◇ Esta imagem mostra a relação entre as projecções dum chirlo com frequência variável nos diferentes espaços V_j e W_j para diferentes escalas $j = 0, \dots, 7$.

■ Uma **análise multiresolução** de $L_2(\mathbb{R})$ consiste na construção duma sequência de sub-espacos vectoriais $\{V_j \subset L_2(\mathbb{R})\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que verificam as seguintes condições:

- $V_j \subset V_{j+1}$.
- A união $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ é densa em $L_2(\mathbb{R})$.
- A intersecção $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- $h_j(t) \in V_j \iff h_j(2t) \in V_{j+1}$
- $h_0(t) \in V_0 \iff h_0(t-k) \in V_0$
- Existe uma função de escala $\phi(t)$ tal que $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma uma base ortonormada de V_0 .

■ A última condição implica que uma base ortonormada de V_j é $\phi_{j,k} = \sqrt{2^j} \phi(2^j t - k)$. Por outro lado, como $V_0 \subset V_1$ tem-se necessariamente a **equação de dilatação**

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \\ &\Updownarrow \\ \phi_{0,0}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(t)\end{aligned}\tag{255}$$

◊ Óbviamente que em geral

$$\phi_{j-1,k'}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{j,k+2k'}(t)\tag{256}$$

Demonstração: _____

$$\phi_{j-1,k'}(t) = \sqrt{2^{j-1}} \phi(2^{j-1}t - k') = \sqrt{2^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2^j t - 2k' - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{j,k+2k'}(t)$$

_____ CQD

◊ Pela ortonormalidade da base $\phi_{1,k}(t)$ de V_1

$$h_k = \langle \phi_{1,k}, \phi \rangle = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_{k'} \langle \phi_{1,k}, \phi_{1,k'} \rangle = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_{k'} \delta_{k,k'}$$

◊ Integrando a equação de dilatação pode-se mostrar que os coeficientes de escala obedecem a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}\tag{257}$$

Demonstração: _____

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) d(2t - k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \right) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) d\xi\end{aligned}$$

_____ CQD

◊ Por outro lado, pela ortogonalidade da base $\phi(t - k)$ em V_0

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2m}^* = \delta_{0,m}\tag{258}$$

Demonstração: _____

$$\delta_{0,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi^*(t - m) dt = \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} h_k h_{k'}^* \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) \phi^*(2t - 2m - k') d(2t) = \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} h_k h_{k'}^* \delta_{k,k'+2m}$$

_____ CQD

◊ Separando a soma em (257) em termos pares e ímpares, e somando (258) em m separando igualmente em termos pares e ímpares obtemos as duas equações

$$\begin{cases} \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_i = \sqrt{2} \\ |\mathbf{H}_p|^2 + |\mathbf{H}_i|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n+1} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_i = \sqrt{2} \\ \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2m}^* &= 1 \\ \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} h_{2n} h_{2n+2m}^* + \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} h_{2n+1} h_{2n+2m+1}^* &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{2(n+m)}^* \right) h_{2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{2(n+m)+1}^* \right) h_{2n+1} \\ \mathbf{H}_p^* \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n} + \mathbf{H}_i^* \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n+1} &= |\mathbf{H}_p|^2 + |\mathbf{H}_i|^2 = 1 \end{aligned}$$

CQD

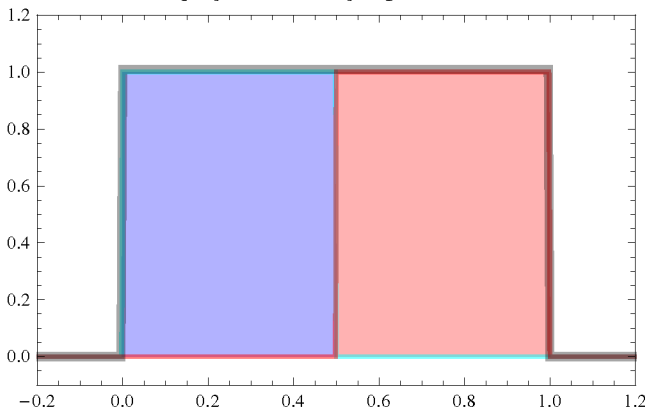
■ Exemplos de Filtros

◇ Haar

$$h_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{260}$$

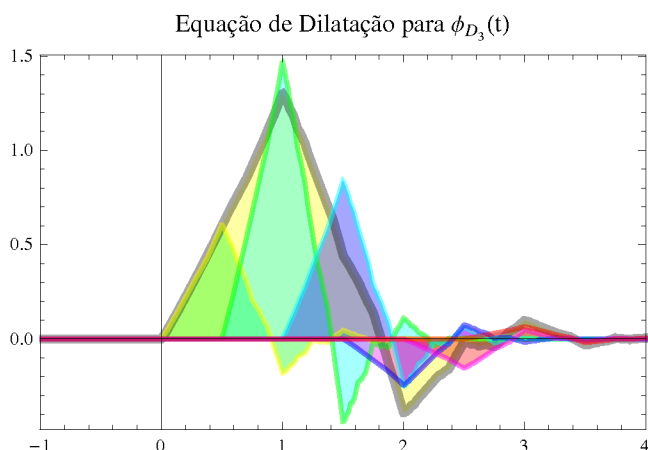
$$\phi(t) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t-1) \right) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$$

Equação de Dilatação para $\phi_{Haar}(t)$



$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} \left(0.333 \phi(2t) + 0.807 \phi(2t-1) + 0.460 \phi(2t-2) - 0.135 \phi(2t-3) - 0.085 \phi(2t-4) + 0.035 \phi(2t-5) \right) \\ h_k &= \begin{bmatrix} 0.333 & 0.807 & 0.460 & -0.135 & -0.085 & 0.035 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{261}$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \left(0.333 \phi(2t) + 0.807 \phi(2t-1) + 0.460 \phi(2t-2) - 0.135 \phi(2t-3) - 0.085 \phi(2t-4) + 0.035 \phi(2t-5) \right)$$



■ Equação de Onduleta

- ◇ Dado que $V_0 \oplus W_0 = V_1$ também existe uma relação entre onduletas e funções de escala, designada **Equação de Onduleta**, que exprime um elemento $\psi(t)$ de W_0 com a base $\phi_{1,k}(t)$ de V_1 .

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \quad (262)$$

⇕

$$\psi_{0,0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{1,k}(t)$$

- ◇ Os coeficientes g_k desta decomposição designam-se **coeficientes de onduleta**. A sua escolha determina completamente a base de onduletas $\psi_{j,k}(t)$ em todas as escalas e instantes.
- ◇ As condições de ortonormalidade das onduletas entre si e entre as onduletas $\psi_{j,k}$ e as funções de escala $\phi_{j,k}$ condicionam a escolha destes coeficientes de onduleta g_k à que é feita para os coeficientes de escala h_k .
- ◇ Em geral a equação de onduletas determina a relação

$$\psi_{j-1,k'}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{j,k+2k'}(t) \quad (263)$$

Demonstração: _____

$$\psi_{j-1,k'}(t) = \sqrt{2^{j-1}} \psi(2^{j-1}t - k') = \sqrt{2^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \phi(2^j t - 2k' - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \phi_{j,k+2k'}(t)$$

CQD

- ◇ Os coeficientes de onduleta são

$$\mathbf{g}_k = \langle \phi_{1,k}, \psi \rangle \quad (264)$$

- ◇ Note-se que esta **equação de onduleta** implica que as onduletas assim obtidas obedecem à condição de ortogonalidade nos coeficientes de escala \mathbf{h}_k onduleta \mathbf{g}_k

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \mathbf{h}_{k-2m}^* = 0 \quad (265)$$

Demonstração: _____

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi^*(t-m) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \phi(2t-k) \sqrt{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_{k'}^* \phi^*(2t-2m-k') dt &= \\ &= \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \mathbf{h}_{k'}^* \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-k) \phi^*(2t-k+k-2m-k') d(2t-k) = \\ &= \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \mathbf{h}_{k'}^* \delta_{0,k-2m-k'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}_k \mathbf{h}_{k-2m}^* = 0 \end{aligned}$$

CQD

■ Transformada de Fourier da Equação de Dilatação:

- ◇ Usando a transformada de Fourier podemos escrever a Equação de Dilatação na forma dual

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (266)$$

Demonstração: _____

$$H(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_k e^{-2\pi i \nu k}$$

$$\Phi(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

$$\begin{aligned} \Phi(\nu) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \mathbf{h}_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-k) e^{-2\pi i \nu t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{h}_k e^{-2\pi i \frac{\nu}{2} k} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-k) e^{-2\pi i \left(\frac{\nu}{2}\right)(2t-k)} d(2t-k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_k e^{-2\pi i \frac{\nu}{2} k} \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) = H\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \end{aligned}$$

- ◇ Usando recursão podemos escrever a função de escala como

$$\Phi(\nu) = \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\nu}{2^k}\right) \right) \quad (267)$$

■ Condições de Ortonormalização das Funções de Escala

- ◇ Numa análise multiresolução a função de escala ϕ gera por translações uma base ortonormada de V_0 que deve verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi^*(t-k) dt = (\phi \star \bar{\phi})(k) = \delta_{0,k} \quad (268)$$

- ◇ Note-se que

$$\mathcal{F}_\nu(\phi \star \bar{\phi}) = |\Phi(\nu)|^2 \quad (269)$$

- ◇ Relembrando a fórmula da soma de Poisson onde $g(t)$ e $G(\nu)$ são transformadas de Fourier uma da outra,

$$\frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{k}{L}\right) e^{2\pi i k \frac{t}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nL) \quad (270)$$

- ◇ e usando $L=1$, $t=\nu$, $G(k) = (\phi \star \bar{\phi})(k)$ e $g(\nu) = |\Phi(\nu)|^2$ obtém-se da ortonormalização da base de V_0 que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi \star \bar{\phi})(k) e^{-2\pi i \nu k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(\nu-k)|^2 = 1 \quad (271)$$

■ Condições de Ortonormalidade e Filtros Simétricos em Quadratura

$$|H(\nu)|^2 + \left| H\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 2 \quad (272)$$

Demonstração: _____

- ◇ A partir da versão dual da Equação de Dilatação

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (273)$$

$$|\Phi(2\nu)|^2 = \frac{1}{2} |H(\nu)|^2 |\Phi(\nu)|^2 \quad (274)$$

- ◇ De acordo com a fórmula (271) para a frequência $\nu - \frac{1}{2}k$ obtemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(2\nu - k)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\nu - \frac{1}{2}k\right) \right|^2 \left| \Phi\left(\nu - \frac{1}{2}k\right) \right|^2 = 1 \quad (275)$$

Separando os termos pares e ímpares da soma em $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(v-k)|^2 |\Phi(v-k)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(v-k-\frac{1}{2}\right) \right|^2 \left| \Phi\left(v-k-\frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1 \quad (276)$$

◇ Note-se que $H(v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i v k} = H(v-k')$ para $k' \in \mathbb{Z}$, i.e. $H(v)$ é periódica com período $\Delta v = 1$, pelo que

$$\frac{1}{2} |H(v)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(v-k)|^2 + \frac{1}{2} \left| H\left(v-\frac{1}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \Phi\left(v-\frac{1}{2}-k\right) \right|^2 = 1 \quad (277)$$

◇ Novamente de acordo com a fórmula (271) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(v-k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \Phi\left(v-\frac{1}{2}-k\right) \right|^2 = 1$ pelo que

$$|H(v)|^2 + \left| H\left(v-\frac{1}{2}\right) \right|^2 = 2 \quad (278)$$

CQD

◇ Esta condição define um Filtro Simétrico em Quadratura (QMF) de meia-banda. De facto este filtro é simétrico em relação a $v = \frac{1}{2}$ e anula-se aí.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} = H(0) \quad \Rightarrow \quad |H(0)|^2 = 2 \quad ; \quad \left| H\left(\frac{1}{2}\right) \right|^2 = 0 \quad (279)$$

$$|H(v)|^2 = 2 - \left| H\left(v-\frac{1}{2}\right) \right|^2 \quad (280)$$

■ Condições de Ortonormalização para as Onduletas

◇ As onduletas $\psi_{0,k}(t) \in W_0$ definidas a partir da equação de onduletas

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t-k) \quad (281)$$

◇ são ortogonais às funções de escala $\phi_{0,k}(t) \in V_0$ se e só se os coeficientes de onduleta g_k e de escala h_k obedecerem a

$$g_k = \pm (-1)^k h_{N-k}^* \quad (282)$$

◇ para um Filtro finito de comprimento N , ou em geral

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}^* \quad (283)$$

■ Óbviamente, da ortogonalidade das translações das onduletas e funções de escala à mesma escala pode-se concluir as relações de ortogonalidade entre onduletas a escalas diferentes, e entre onduletas e funções de escala em escalas diferentes.

$$W_j \oplus V_j = V_{j+1} \quad ; \quad W_{j+1} \perp V_{j+1} \quad \Rightarrow \quad W_{j+1} \perp W_j \quad (284)$$

■ Devido à equação de dilatação, as funções de escala a escalas diferentes não são óbviamente ortogonais.

■ Transformada de Fourier da Equação de Onduletas

$$\Psi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} G\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

$$G(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-2\pi i \nu k}$$

- A condição de ortogonalidade entre ondulas e funções de escala traduz-se na relação entre filtros

$$G(\nu) = e^{-2\pi i \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} H^*\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \quad (286)$$

Demonstração: _____

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k}^* e^{-2\pi i \nu k} = e^{-2\pi i \nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i k} h_{1-k}^* e^{2\pi i \nu (1-k)} = \\ &= -e^{-2\pi i \nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \frac{1}{2}(1-k)} h_{1-k}^* e^{2\pi i \nu (1-k)} = e^{-2\pi i \left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-k}^* e^{2\pi i \left(\nu + \frac{1}{2}\right)(1-k)} \end{aligned}$$

_____ CQD

- ◇ A função $G(\nu)$ é também periódica de período $\Delta\nu = 1$ e

$$|G(\nu)|^2 + \left|G\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 2 \quad (287)$$

$$G(\nu) H^*(\nu) + G\left(\nu - \frac{1}{2}\right) H^*\left(\nu - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Demonstração: _____

- ◇ Da ortogonalidade entre W_0 e V_0 resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi^*(t-k) dt = (\psi \star \bar{\phi})(k) = 0 \quad (288)$$

$$\mathcal{F}_\nu(\psi \star \bar{\phi}) = \Psi(\nu) \Phi^*(\nu) \quad (289)$$

- ◇ A transformada discreta de Fourier é, usando a fórmula da soma de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi \star \bar{\phi})(k) e^{-2\pi i \nu k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(\nu-k) \Phi^*(\nu-k) = 0 \quad (290)$$

- ◇ Usando as Equação de Dilatação e Onduleta transformadas

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(\nu-k) \Phi^*(\nu-k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{\nu-k}{2}\right) H^*\left(\frac{\nu-k}{2}\right) \left|\Phi\left(\frac{\nu-k}{2}\right)\right|^2 = 0 \quad (291)$$

- ◇ Uma vez mais separando no somatório os índices pares e ímpares

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{\nu}{2} - k\right) H^*\left(\frac{\nu}{2} - k\right) \left| \Phi\left(\frac{\nu}{2} - k\right) \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} G\left(\frac{\nu-1}{2} - k\right) H^*\left(\frac{\nu-1}{2} - k\right) \left| \Phi\left(\frac{\nu-1}{2} - k\right) \right|^2 =$$

$$\frac{1}{2} G\left(\frac{\nu}{2}\right) H^*\left(\frac{\nu}{2}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \Phi\left(\frac{\nu}{2} - k\right) \right|^2 + \frac{1}{2} G\left(\frac{\nu-1}{2}\right) H^*\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \Phi\left(\frac{\nu-1}{2} - k\right) \right|^2 = 0$$

◇ Como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Phi(\nu - k)|^2 = 1$ e esta expressão é válida para qualquer ν , obtém-se assim

$$G(\nu) H^*(\nu) + G\left(\nu - \frac{1}{2}\right) H^*\left(\nu - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (293)$$

CQD

■ Transformada de sinais finitos (DTWT)

- Assumindo que temos uma análise multi-resolução de $L_2(\mathbb{R})$, e designando por V_L a escala mais grossa que estamos interessados em representar, então

$$L_2(\mathbb{R}) = V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \dots \tag{294}$$

◇ Isto significa que qualquer função $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ pode ser representada na forma

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L,k} \phi_{L,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=L}^{\infty} \mathfrak{w}_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{295}$$

$$\mathfrak{s}_{n,k} = \langle \phi_{n,k}, f \rangle \quad ; \quad \mathfrak{w}_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle$$

- Na prática não é possível obter detalhes com resoluções infinitas, por isso vamos assumir que um sinal $f(t)$ é amostrado com uma resolução máxima J , ou seja $f_J(t) \in V_J$ é a melhor aproximação que conseguimos obter do sinal. De acordo com uma multiresolução, podemos escrever

$$f_J(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k} \phi_{J,k}(t) \tag{296}$$

- Fazendo uma amostragem uniforme do sinal com $N = 2^M$ pontos num intervalo $\Delta T = [t_0, t_1]$, o sinal $f(t)$ é representado pelas suas amostras $f_k = f(t_k)$ nos pontos $t_k = t_0 + k \delta t = t_0 + k \frac{\Delta T}{N}$. Podemos igualmente optar por usar um sinal dilatado e translado $f_N(k) = f(t_0 + (k + \frac{N}{2}) \frac{\Delta T}{N})$ no intervalo $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$.

◇ Como $V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$ vamos poder representar $f_J(t)$ como

$$f_J(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(t) \tag{297}$$

- ◇ Contudo, usando as equações de dilatação e onduletas, podemos agora relacionar os coeficientes $\mathfrak{s}_{J-1,k}$ e $\mathfrak{w}_{J-1,k}$ desta decomposição (uma aproximação mais grossa e detalhes) com os coeficientes $\mathfrak{s}_{J,k}$ iniciais.
- ◇ Para a aproximação à escala $J - 1$ temos

$$\mathfrak{s}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{h}_{k'-2k}^* \tag{298}$$

Demonstração: _____

$$\mathfrak{s}_{J-1,k} = \langle \phi_{J-1,k}, f_J \rangle = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \langle \phi_{J-1,k}, \phi_{J,k'} \rangle \tag{299}$$

$$\phi_{J-1,k}(t) = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{k''} \phi_{J,k''+2k}(t) \tag{300}$$

$$\mathfrak{s}_{J-1,k} = \sum_{k',k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{h}_{k''}^* \langle \phi_{J,k''+2k}, \phi_{J,k'} \rangle = \sum_{k',k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{h}_{k''} \delta_{k',k''+2k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{h}_{k'-2k} \tag{301}$$

CQD

- ◇ Note-se que de acordo com esta fórmula um sinal finito de $N = 2^M$ valores $\mathfrak{s}_{J,k}$ diferentes de zero para $k = 0, 1, \dots, N - 1$ produzirá apenas $\frac{N}{2}$ valores $\mathfrak{s}_{J-1,k}$ diferentes de zero para $k > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{J-1,0} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,0} + h_1 \mathfrak{s}_{J,1} + h_2 \mathfrak{s}_{J,2} + h_3 \mathfrak{s}_{J,3} + h_4 \mathfrak{s}_{J,4} + h_5 \mathfrak{s}_{J,5} + h_6 \mathfrak{s}_{J,6} + h_7 \mathfrak{s}_{J,7} + h_8 \mathfrak{s}_{J,8} + h_9 \mathfrak{s}_{J,9} + h_{10} \mathfrak{s}_{J,10} \\
\mathfrak{s}_{J-1,1} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,2} + h_1 \mathfrak{s}_{J,3} + h_2 \mathfrak{s}_{J,4} + h_3 \mathfrak{s}_{J,5} + h_4 \mathfrak{s}_{J,6} + h_5 \mathfrak{s}_{J,7} + h_6 \mathfrak{s}_{J,8} + h_7 \mathfrak{s}_{J,9} + h_8 \mathfrak{s}_{J,10} + h_9 \mathfrak{s}_{J,11} + h_{10} \mathfrak{s}_{J,12} \\
\mathfrak{s}_{J-1,2} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,4} + h_1 \mathfrak{s}_{J,5} + h_2 \mathfrak{s}_{J,6} + h_3 \mathfrak{s}_{J,7} + h_4 \mathfrak{s}_{J,8} + h_5 \mathfrak{s}_{J,9} + h_6 \mathfrak{s}_{J,10} + h_7 \mathfrak{s}_{J,11} + h_8 \mathfrak{s}_{J,12} + h_9 \mathfrak{s}_{J,13} + h_{10} \mathfrak{s}_{J,14} \\
\mathfrak{s}_{J-1,3} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,6} + h_1 \mathfrak{s}_{J,7} + h_2 \mathfrak{s}_{J,8} + h_3 \mathfrak{s}_{J,9} + h_4 \mathfrak{s}_{J,10} + h_5 \mathfrak{s}_{J,11} + h_6 \mathfrak{s}_{J,12} + h_7 \mathfrak{s}_{J,13} + h_8 \mathfrak{s}_{J,14} + h_9 \mathfrak{s}_{J,15} \\
\mathfrak{s}_{J-1,4} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,8} + h_1 \mathfrak{s}_{J,9} + h_2 \mathfrak{s}_{J,10} + h_3 \mathfrak{s}_{J,11} + h_4 \mathfrak{s}_{J,12} + h_5 \mathfrak{s}_{J,13} + h_6 \mathfrak{s}_{J,14} + h_7 \mathfrak{s}_{J,15} \\
\mathfrak{s}_{J-1,5} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,10} + h_1 \mathfrak{s}_{J,11} + h_2 \mathfrak{s}_{J,12} + h_3 \mathfrak{s}_{J,13} + h_4 \mathfrak{s}_{J,14} + h_5 \mathfrak{s}_{J,15} \\
\mathfrak{s}_{J-1,6} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,12} + h_1 \mathfrak{s}_{J,13} + h_2 \mathfrak{s}_{J,14} + h_3 \mathfrak{s}_{J,15} \\
\mathfrak{s}_{J-1,7} &= h_0 \mathfrak{s}_{J,14} + h_1 \mathfrak{s}_{J,15} \\
\mathfrak{s}_{J-1,8} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,9} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,10} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,11} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,12} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,13} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,14} &= 0 \\
\mathfrak{s}_{J-1,15} &= 0
\end{aligned}$$

◇ Para os detalhes à escala $J-1$ obtemos de forma análoga $\frac{N}{2}$ valores diferentes de zero

$$\mathbf{w}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{g}_{k'-2k}^* \quad (302)$$

Demonstração: _____

$$\mathbf{w}_{J-1,k} = \langle \psi_{J-1,k}, f_J \rangle = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \langle \psi_{J-1,k}, \phi_{J,k'} \rangle \quad (303)$$

$$\psi_{j-1,k}(t) = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{k''} \phi_{j,k''+2k}(t) \quad (304)$$

$$\mathbf{w}_{J-1,k} = \sum_{k',k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{g}_{k''}^* \langle \phi_{J,k''+2k}, \phi_{J,k'} \rangle = \sum_{k',k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{g}_{k''}^* \delta_{k',k''+2k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{g}_{k'-2k}^* \quad (305)$$

□□□

◇ Repetindo o processo agora com o sinal $f_{J-1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(t)$ obtemos outro par

$$\mathfrak{s}_{J-2,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J-1,k'} \mathfrak{h}_{k'-2k}^* \quad (306)$$

$$\mathbf{w}_{J-2,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J-1,k'} \mathfrak{g}_{k'-2k}^* \quad (307)$$

◇ Por fim, iterando este processo, chegamos à expressão

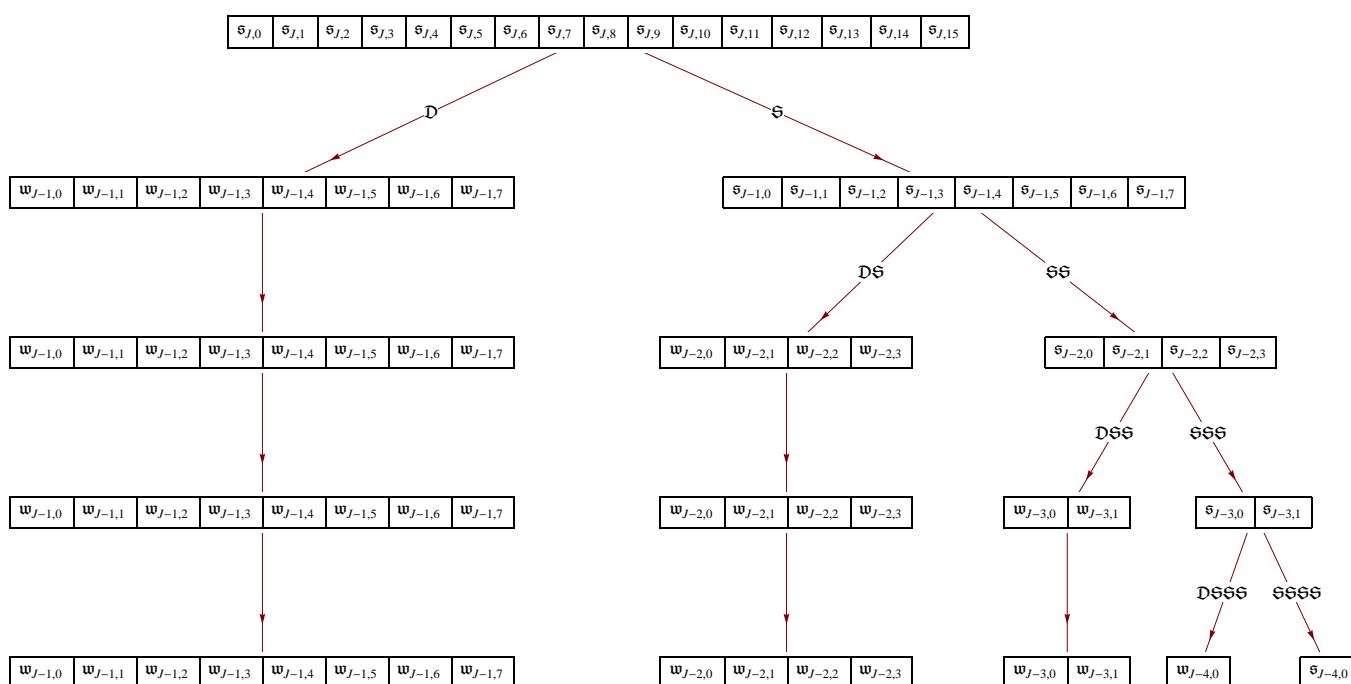
$$f_J(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L,k} \phi_{L,k}(t) + \sum_{j=L}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{w}_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (308)$$

■ Para um sinal finito de comprimento $N = 2^n$ podemos verificar que apenas $N/2$ dos coeficientes $\mathfrak{s}_{J-1,k}$ e $\mathbf{w}_{J-1,k}$ são diferentes de zero, contra $N/4$ dos coeficientes $\mathfrak{s}_{J-2,k}$ e $\mathbf{w}_{J-2,k}$ e assim sucessivamente. Para um filtro de comprimento K , o número de operações requeridas para executar esta transformada será

$$\mathfrak{s}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{h}_{k'-2k}^* = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k''+2k} \mathfrak{h}_{k''}^* \tag{309}$$

$$\mathfrak{w}_{J-1,k} = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k'} \mathfrak{g}_{k'-2k}^* = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J,k''+2k} \mathfrak{g}_{k''}^* \tag{310}$$

$$KN \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) < 2KN \tag{311}$$



- A transformada de onduleta inversa procura reconstruir os coeficientes $\mathfrak{s}_{j,k}$ a partir da informação dos detalhes $\mathfrak{w}_{j,k}$ e da aproximação mais grossa $\mathfrak{s}_{L,k}$. As condições da análise multi-resolução permitem uma reconstrução perfeita a partir do facto de que $V_L \oplus W_L = V_{L+1}$, portanto

$$\mathfrak{s}_{L+1,k'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L,k} \mathfrak{h}_{k'-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{L,k} \mathfrak{g}_{k'-2k} \tag{312}$$

Demonstração: _____

$$\phi_{L,k}(t) = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{k''} \phi_{L+1,k''+2k}(t) \implies \langle \phi_{L+1,k'}, \phi_{L,k} \rangle = \mathfrak{h}_{k'-2k} \tag{313}$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_{k'' \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{k''} \phi_{j+1,k''+2k}(t) \implies \langle \phi_{L+1,k'}, \psi_{j,k} \rangle = \mathfrak{g}_{k'-2k} \delta_{j,L} \tag{314}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{L+1,k'} &= \langle \phi_{L+1,k'}, f_J \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L,k} \langle \phi_{L+1,k'}, \phi_{L,k} \rangle + \sum_{j=L}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{j,k} \langle \phi_{L+1,k'}, \psi_{j,k} \rangle = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L,k} \mathfrak{h}_{k'-2k} + \sum_{j=L}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{j,k} \mathfrak{g}_{k'-2k} \delta_{j,L}
\end{aligned} \tag{315}$$

CQD

◇ De forma semelhante se obtêm os valores para as aproximações em V_{L+2}, \dots, V_{J-1} iterando estas fórmulas.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_{L+2,k'} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{L+1,k} \mathfrak{h}_{k'-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{L+1,k} \mathfrak{g}_{k'-2k} \\
&\quad \vdots \\
\mathfrak{s}_{J,k'} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_{J-1,k} \mathfrak{h}_{k'-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{w}_{J-1,k} \mathfrak{g}_{k'-2k}
\end{aligned} \tag{316}$$