Representações Tempo−Escala: Transformadas de Onduletas (WT)

- **Transformadas de onduleta**

  ◊ No caso das onduletas os átomos tempo−frequência são gerados pelas translações e dilatações de uma onduleta−mãe $\psi(t)$

$$g_{a,b}(t) \equiv \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{202}$$

$$\mathcal{T}_{a,b}(f) \equiv \mathfrak{W}_{a,b}(f) = \langle \psi_{a,b},\, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t)\, dt \tag{203}$$

  ◊ Assumindo que $\|\psi\| = 1$

$$\langle t\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t\,|\psi(t)|^2\, dt = 0 \tag{204}$$

  ◊ A onduleta $\psi_{a,b}(t)$ está centrada em b

$$\langle t\rangle_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} t\,|\psi_{a,b}(t)|^2\, dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} t\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (b + a\,\tau)\,|\psi(\tau)|^2\, d\tau = b \tag{205}$$

  ◊ A sua variância é proporcional à da onduleta mãe pelo factor de escala

$$\Delta t_{a,b}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2\,|\psi_{a,b}(t)|^2\, dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2\,|\psi(\tau)|^2\, d\tau \;=\; a^2\,\Delta t^2 \tag{206}$$

  ◊ Uma onduleta analítica tem transformada de Fourier nula nas frequências negativas. Assim, designando por $\Psi(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\psi)$

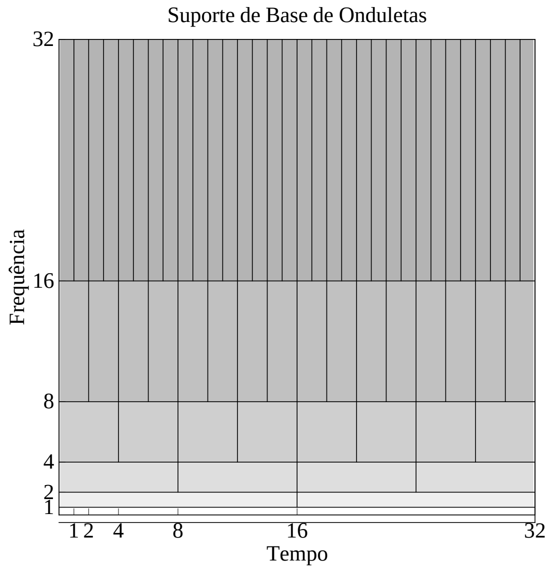
$$\langle \nu\rangle = \int_0^{\infty} \nu\,|\Psi(\nu)|^2\, d\nu \tag{207}$$

$$\langle \nu\rangle_{a,b} = \int_0^{\infty} \nu\,|\Psi_{a,b}(\nu)|^2\, d\nu = \int_0^{\infty} \nu\left|\sqrt{a}\;\Psi(a\,\nu)\, e^{2\pi i b \nu}\right|^2 d\nu = \frac{1}{a}\langle \nu\rangle \tag{208}$$

$$\begin{aligned}\Delta\,\nu_{a,b}^2 &= \int_0^{\infty}\left(\nu - \frac{\langle\nu\rangle}{a}\right)^2 |\Psi_{a,b}(\nu)|^2\, d\nu = \int_0^{\infty}\left(\nu - \frac{\langle\nu\rangle}{a}\right)^2 \left|\sqrt{a}\;\Psi(a\,\nu)\, e^{2\pi i b\nu}\right|^2 d\nu = \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} (a\,\nu - \langle\nu\rangle)^2\,|\Psi(a\,\nu)|^2\, d(a\,\nu) = \frac{1}{a^2}\,\Delta\nu^2\end{aligned} \tag{209}$$

  ◊ Para as onduletas reais o mesmo resultado acontece, excepto que a integração em ν deve ser em todo o domínio $\mathbb{R}$.

  ◊ As caixas de Heisenberg dos átomos tempo−frequência de onduletas $\psi_{a,b}$ têm igualmente área constante $\Delta t_{a,b} \times \Delta\,\nu_{a,b} = \Delta t \times \Delta\nu \geq \frac{1}{4\pi}$ mas agora as suas dimensões são variáveis, ou seja a resolução em tempo escala com a, e em frequência com $\frac{1}{a}$.



■ Características

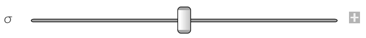
◇ As onduletas complexas devem ser analíticas, o que significa que a sua transformada de Fourier é real e nula para frequências negativas $\nu < 0$. Podem assim ser usadas para separar as componentes de amplitude e fase.

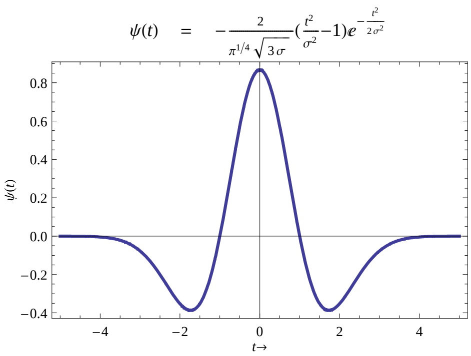
◇ As onduletas reais são melhores para detectar as transições rápidas de sinal. Exemplos: aresta de imagens ou sinais multi−fractais.

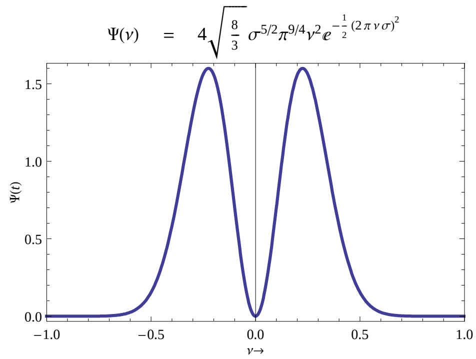
■ Exemplo de onduleta real: Onduletas de Marr (Mexican Hat)

◇ O Laplaciano de Gaussiana $G(r) = -e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ normalizada. O espectro tem suporte simétrico em relação à origem porque $\psi(t) = \psi(-t)$.

$$\psi(t) = \nabla^2 G(t) = -\frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\sigma}}\left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_\nu(\psi) = \Psi(\nu) = 4\sqrt{\frac{8}{3}}\, \sigma^{5/2}\, \pi^{9/4}\, \nu^2\, e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2} \tag{211}$$







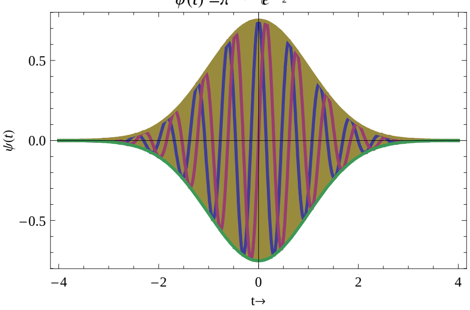
■ Exemplo de onduleta analítica: Onduletas de Morlet

$$\psi(t) = A\left(e^{-2\pi i\,\nu_c t} - e^{-2\pi^2\nu_c^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \approx \pi^{-1/4}\, e^{-\frac{t^2}{2} - 2\pi i \nu_c t} \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\psi) \approx \sqrt{2}\, \pi^{1/4}\, e^{-2\pi^2(\nu_c - \nu)^2} \tag{212}$$

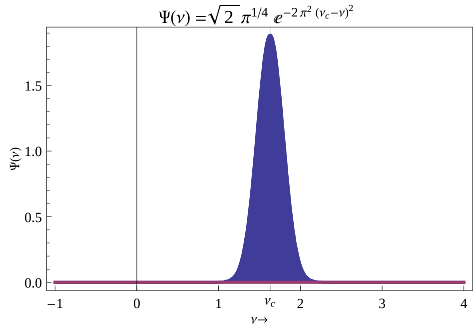
◇ Frequência característica pode ser tomada como o centro do espectro de potência $|\Psi(\nu)|^2$. O espectro só tem suporte para $\nu > 0$.

ν₀ = 1.63

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}\, e^{-\frac{t^2}{2} + 2\pi i \nu_c t}$$



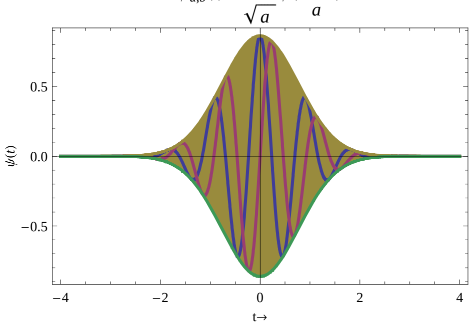
$$\Psi(\nu) = \sqrt{2}\,\pi^{1/4}\, e^{-2\pi^2(\nu_c-\nu)^2}$$



◇ Nas onduletas de Morlet $\psi_{a,b}$ a largura da janela a está relacionada com a frequência característica através da relação $\nu_a = \frac{\nu_c}{a}$.

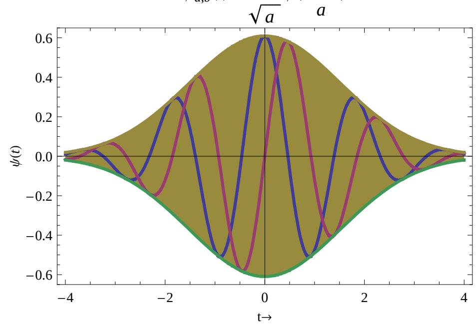
ν_o = 0.82
a = 0.76
b= 0.00

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$



ν_o = 0.82
a = 1.52
b= 0.00

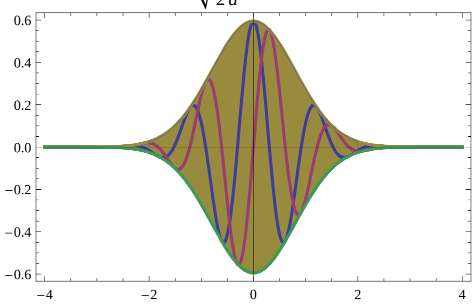
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$



◇ Em contraste, nos átomos de Gabor $g_{b,\nu_c}(t)$ para a WFT, a frequência característica é fixada por ν_c independentemente da largura da janela a.

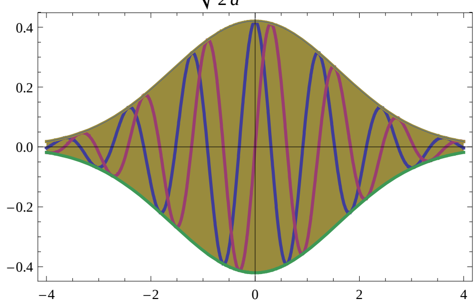
ν= 0.82
a= 2.00
b= 0.00

$$g_{b,\nu_c}(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\,a^2}} e^{-\pi\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} e^{2\pi i \nu t}$$



ν= 0.82
a= 4.00
b= 0.00

$$g_{b,\nu_c}(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\,a^2}} e^{-\pi\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} e^{2\pi i \nu t}$$



- **Condição de Admissibilidade**

  - Uma onduleta−mãe $\psi(t)$ é uma função em $L_2(\mathbb{R})$, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt < +\infty$, que verifica a **condição de admissibilidade** seguinte, com $\Psi(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\psi)$:

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\nu)|^2}{\nu} \, d\nu < +\infty \tag{213}$$

  - A condição de admissibilidade impõe que as onduletas tenham área nula

$$\Psi(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \, dt = 0 \tag{214}$$

  - Para transformadas multidimensionais com $\psi(\vec{\tau}) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ a condição de admissibilidade escreve−se, com $\Psi(\vec{\xi}) = \mathcal{F}_{\vec{\xi}}(\psi)$,

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\left|\Psi\left(s\,\vec{\xi}\right)\right|^2}{s} \, ds < +\infty \tag{215}$$

  - Note−se que se $\mathcal{F}_{\nu=0}(\psi) = \Psi(0) = 0$ e $\Psi(\nu) \in C^1(\mathbb{R})$ então $C_\psi < +\infty$.

$$\Psi(\nu) \in C^1(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) \, |\psi(t)| \, dt < +\infty \tag{216}$$

- **Definição**

  - A acção do grupo de Translações e Dilatações $G = \mathbb{R}_+ \times_s \mathbb{R}$ sobre a onduleta−mãe gera as onduletas

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{217}$$

    - ◊ A transformada contínua de onduletas associada ao frame de onduletas $\{\psi_{a,b}\}$ é

$$\mathfrak{W}_{a,b}(f) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle \psi_{a,b}, \, f \rangle \tag{218}$$

  - A Transformada de Onduleta pode ser vista como a acção de **filtros lineares passa−banda** em cada escala (porque $\Psi_a(0) = 0$)

$$\mathfrak{W}_{a,b}(f) = f \star \overline{\psi}_a(b) \tag{219}$$

◊ Designando por $\overline{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi^*\left(-\frac{t}{a}\right)$ então $\psi^*_{a,b}(t) = \overline{\psi}_a(b-t)$ e

$$\overline{\Psi}_a(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\overline{\psi}_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi^*\left(-\frac{t}{a}\right) e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \sqrt{a}\,\Psi^*(a\,\nu) \tag{220}$$

$$\mathfrak{W}_{a,b}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\psi}_a(b-t)\,dt = \left(f \star \overline{\psi}_a\right)(b) = \mathcal{F}_b^{-1}\left(F(\nu)\,\overline{\Psi}_a(\nu)\right) \tag{221}$$

- **Teorema de Calderón (1964) e Grossman, Morlet (1984):**
  - A invertibilidade da transformada de onduletas é garantida pela condição de admissibilidade.

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\nu)|^2}{\nu}\,d\nu < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}_{a,b}(f)\,\psi_{a,b}(t)\,db\,\frac{da}{a^2} \tag{222}$$

  - Prova:

◊ Usando a representação $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{t}{a}\right)$ e a fómula (219) podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}_{a,b}(f)\,\psi_{a,b}(t)\,db = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f \star \overline{\psi}_a\right)(b)\,\psi_a(t-b)\,db = \left(\left(f \star \overline{\psi}_a\right) \star \psi_a\right)(t) \tag{223}$$

◊ Designando $\overline{\Psi}_a(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\overline{\psi}_a) = \sqrt{a}\,\Psi^*(a\,\nu)$ e $\Psi_a(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\psi_a) = \sqrt{a}\,\Psi(a\,\nu)$ então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}_{a,b}(f)\,\psi_{a,b}(t)\,db = \mathcal{F}_t^{-1}\left(\mathcal{F}_\nu\left(f \star \overline{\psi}_a\right)\mathcal{F}_\nu(\psi_a)\right) = \mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,\overline{\Psi}_a(\nu)\,\Psi_a(\nu)\right) = \mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,a\,|\Psi(a\,\nu)|^2\right) \tag{224}$$

◊ Trocando a ordem dos integrais vemos que

$$\frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}_{a,b}(f)\,\psi_{a,b}(t)\,db\,\frac{da}{a^2} = \frac{1}{C_\psi}\,\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\int_0^\infty |\Psi(a\,\nu)|^2\,\frac{da}{a}\right) = \frac{1}{C_\psi}\,\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,C_\psi\right) = f(t) \tag{225}$$

  - De forma análoga se mostra que quando $C_\psi < +\infty$ se tem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{W}_{a,b}(f)|^2 \, db \, \frac{da}{a^2}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}^*_{a,b}(f) \, \mathfrak{W}_{a,b}(g) \, db \, \frac{da}{a^2} \tag{226}$$

- Existência de Kernel replicativo:
  - ◇ A grande redundância da transformada contínua de onduletas sugere que nem todas as funções em G são transformadas de onduletas de uma função $f(t)$. Pelo teorema de Calderón pode−se verificar que existe um kernel que verifica para as transformadas contínuas

$$K(\alpha\beta, ab) = \left\langle \psi_{\alpha,\beta}, \psi_{a,b} \right\rangle \tag{227}$$

$$\mathfrak{W}_{\alpha,\beta}(f) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha\beta, ab) \, \mathfrak{W}_{a,b}(f) \, db \, \frac{da}{a^2} \tag{228}$$

- A **Identidade de Calderón** é a expressão do seu teorema como a **Decomposição da Identidade** em termos do Operador de Convolução com $\psi_a(t)$:

$$\mathfrak{D}_a(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \left(f \star \psi_a\right)(t) \quad ; \quad \mathfrak{D}_a^\dagger f(t) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \left(f \star \overline{\psi}_a\right)(t) \tag{229}$$

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{D}_a \, \mathfrak{D}_a^\dagger \, \frac{da}{a^2} = \mathbb{1} \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \int_0^{\infty} \left(\mathfrak{D}_a \, \mathfrak{D}_a^\dagger(f)\right)(t) \, \frac{da}{a^2} \tag{230}$$

• Funções de Escala e Onduletas

- Designamos por **função de escala** associada à onduleta−mãe $\psi(t)$ a função $\phi(t)$ cuja transformada de Fourier é $\Phi(\nu)$, e definida através do seu módulo

$$|\Phi(\nu)|^2 = \int_1^{\infty} |\Psi(a\,\nu)|^2 \, \frac{da}{a} = \int_\nu^{\infty} |\Psi(\eta)|^2 \, \frac{d\eta}{\eta} \tag{231}$$

  - ◇ De acordo com a condição de admissibilidade $\phi(t)$ deve ser a resposta impulsiva de um **filtro passa−baixos** já que

$$\lim_{\nu \to 0} |\Phi(\nu)|^2 = C_\psi \tag{232}$$

  - ◇ É possível mostrar que com esta definição $\|\phi\| = 1$ para onduletas normalizadas.

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\nu)|^2 \, d\nu = \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(a\,\nu)|^2 \, d\nu \, \frac{da}{a} = \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\eta)|^2 \, d\eta \, \frac{da}{a^2} = 1 \tag{233}$$

  - ◇ Usualmente a transformada de onduleta $\mathfrak{W}_{a,b}(f)$ é conhecida para escalas $a < \alpha$, o que corresponde a trabalhar com uma resolução máxima.
  - ◇ De acordo com o **teorema de Calderón** podemos obter a função original usando a informação de onduletas até à escala α e completando−a com o coeficiente de uma função de escala $\phi_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t}{a}\right)$.
- A reconstrução de uma função $f(t)$ em termos de onduletas $\psi_{a,b}(t)$ e função de escala $\phi_a(t)$ é

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\alpha \left(\left(f\star\overline{\psi}_a\right)\star\psi_a\right)(t)\,\frac{da}{a^2} + \frac{1}{C_\psi\,\alpha}\left(\left(f\star\overline{\phi}_\alpha\right)\star\phi_\alpha\right)(t) \tag{234}$$

◇ O termo $\left(f\star\overline{\phi}_\alpha\right)(b)$ representa uma **aproximação de baixas frequências** de $f(t)$, e tal como a transformada de onduleta pode escrever−se

$$\mathfrak{S}_a(f)(b) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}}\left(f\star\overline{\phi}_a\right)(b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \tag{235}$$

■ A fórmula de reconstrução (234) pode assim escrever−se

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}}\int_0^\alpha \left(\mathfrak{D}_a^\dagger(f)\star\psi_a\right)(t)\,\frac{da}{a^2} + \frac{1}{\alpha\sqrt{C_\psi}}\left(\mathfrak{S}_\alpha(f)\star\phi_\alpha\right)(t) \tag{236}$$

■ Prova:

◇ Primeiro vamos mostrar a seguinte identidade, onde $\overline{g}(t) = g^*(-t)$, $F(\nu) = \mathcal{F}_\nu(f)$ e $G(\nu) = \mathcal{F}_\nu(g)$.

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,|G(\nu)|^2\right) = ((f\star\overline{g})\star g)(t) \tag{237}$$

a) Prova:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,|G(\nu)|^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\,F(\nu)\,G^*(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu = \\
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,e^{-2\pi i\nu\xi}\,d\xi\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\,e^{-2\pi i\nu\eta}\,d\eta\right)^* e^{2\pi i\nu t}\,d\nu = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu(t-\xi+\eta-\tau)}\,d\nu\right)d\eta\,d\tau\,d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\eta)\,\delta(\eta-(\xi+\tau-t))\,d\eta\right)d\tau\,d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g^*(\xi-t+\tau)\,d\tau\right)d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\overline{g}(t-\xi-\tau)\,d\tau\right)d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,(f\star\overline{g})(t-\xi)\,d\xi = \\
&= (g\star(f\star\overline{g}))(t) = ((f\star\overline{g})\star g)(t)
\end{aligned} \tag{238}$$

◇ Relembrando que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{W}_{a,b}(f)\,\psi_{a,b}(t)\,db = \left(\left(f\star\overline{\psi}_a\right)\star\psi_a\right)(t)$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\alpha \left(\left(f\star\overline{\psi}_a\right)\star\psi_a\right)\frac{da}{a^2} + \frac{1}{C_\psi}\int_\alpha^\infty \left(\left(f\star\overline{\psi}_a\right)\star\psi_a\right)(t)\,\frac{da}{a^2} \tag{239}$$

O último termo escreve−se

$$\frac{1}{C_\psi}\int_\alpha^\infty \left(\left(f\star\overline{\psi}_a\right)\star\psi_a\right)(t)\,\frac{da}{a^2} = \frac{1}{C_\psi}\int_\alpha^\infty \mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,|\Psi_a(\nu)|^2\right)\frac{da}{a^2} = \frac{1}{C_\psi}\,\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\int_\alpha^\infty |\Psi_a(\nu)|^2\,\frac{da}{a^2}\right) \tag{240}$$

◇ Como $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{t}{a}\right)$ e $\Psi_a(\nu) = \sqrt{a}\;\Psi(a\,\nu)$

$$\int_\alpha^\infty |\Psi_a(\nu)|^2\,\frac{da}{a^2} = \int_\alpha^\infty |\Psi(a\,\nu)|^2\,\frac{da}{a} = \int_1^\infty |\Psi(s\,\alpha\,\nu)|^2\,\frac{ds}{s} = |\Phi(\alpha\,\nu)|^2 \tag{242}$$

◇ Fazendo $\phi_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\phi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, a sua transformada de Fourier é $\Phi_\alpha(\nu) = \sqrt{\alpha}\;\Phi(\alpha\,\nu)$ e assim

$$\frac{1}{C_\psi}\,\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\int_\alpha^\infty |\Psi_a(\nu)|^2\,\frac{da}{a^2}\right) = \frac{1}{C_\psi\,\alpha}\,\mathcal{F}_t^{-1}\left(F(\nu)\,|\Phi_\alpha(\nu)|^2\right) = \frac{1}{C_\psi\,\alpha}\left(\left(f\star\overline{\phi}_\alpha\right)\star\phi_\alpha\right)(t) \tag{243}$$

Equação de Dilatação

◇ Para $f(t) = \phi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\phi\left(\frac{t}{a}\right)$ e $\alpha = 1$ obtemos, na condição de ortogonalidade adequada,

$$\phi\left(\frac{t}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{a}}{C_\psi}\left(\phi_a\star\overline{\phi}\right)(b)\,\phi(t-b)\,db \tag{244}$$

Exemplo: Resposta de Frequência para Onduletas e Função de Escala de Marr

◇ Para o Laplaciano de Gaussiana $G(r) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ normalizada, as transformadas de Fourier da onduleta $\psi(t)$ e da função de escala $\phi(t)$ são respectivamente:

$$\Psi(\nu) = 4\sqrt{\frac{8}{3}}\;\sigma^{5/2}\,\pi^{9/4}\,\nu^2\,e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2} \qquad\qquad \Phi(\nu) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma^{3/2}\,\pi^{1/4}\sqrt{4\pi^2\nu^2+\frac{1}{\sigma^2}}\;e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2} \tag{245}$$