

# Representações Mistas: Tempo–Frequência e Tempo–Escala

## ■ Átomos Tempo–Frequência

- Uma família de átomos tempo–frequência  $\{g_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in I}$  onde  $\mathbf{k}$  representa vários parâmetros, permite correlacionar um sinal com regiões bem localizadas em tempo e frequência. Assumindo  $g_{\mathbf{k}} \in L_2(\mathbb{R})$  e  $\|g_{\mathbf{k}}\| = 1$ , se  $g_{\mathbf{k}}(t) \approx 0$  quando  $|t - t_{\mathbf{k}}| > \sigma_{\mathbf{k},t}$  a seguinte transformada depende dos valores de  $f$  apenas na vizinhança de  $t = \tau$

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}}(f) = \langle g_{\mathbf{k}}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_{\mathbf{k}}^*(t) dt \quad (151)$$

- Pela fórmula de Parseval, designando por  $G_{\mathbf{k}}(\nu) = \mathcal{F}_{\nu}(g_{\mathbf{k}})$  e  $F(\nu) = \mathcal{F}_{\nu}(f)$ , pode-se ver que a transformada anterior só depende de valores de  $F(\nu)$  numa vizinhança dual de um certo  $\nu_{\mathbf{k}}$  já que  $G_{\mathbf{k}}(\nu) \approx 0$  para  $|\nu - \nu_{\mathbf{k}}| > \sigma_{\mathbf{k},\nu}$

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}}(f) = \langle G_{\mathbf{k}}, F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) G_{\mathbf{k}}^*(\nu) d\nu \quad (152)$$

$$\langle g_{\mathbf{k}}, f \rangle = (f * g_{\mathbf{k}}^*)(0) = \mathcal{F}_{t=0}^{-1}(F G_{\mathbf{k}}^*) \quad (153)$$

## ● Exemplos

### ■ Base Harmónica

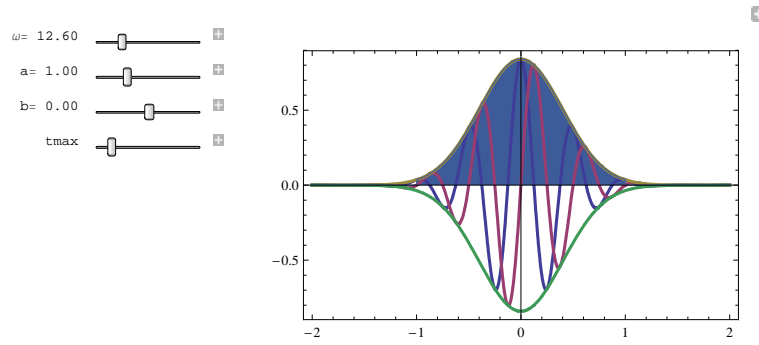
- ◇ Escolhendo  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  uma **base ortonormal** de  $L_2([0, a[)$  pode-se construir uma base  $\{g_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  tal que as mudanças de  $f$  num intervalo  $[m_1 a, m_2 a]$  apenas afectam os coeficientes  $\langle g_{n,m}, f \rangle$  com  $m_1 \leq m \leq m_2$ .

$$g_{n,m}(x) = \begin{cases} h_n(x - m a) & x \in [m a, (m + 1) a[ \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (154)$$

- ◇ Contudo os  $g_{n,m}$  introduzem discontinuidades que podem não existir em  $f$ , o que se reflecte na presença de componentes de alta frequência (alto  $n$ ) artificialmente introduzidos por esta partição de  $\mathbb{R}$  em intervalos disjuntos

### ■ Átomos de Gabor

$$g_{a,b,\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{i\omega t} \quad ; \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (155)$$



Átomos de Gabor com  $\begin{cases} \omega \\ a \\ b - a \\ b + a \end{cases}$  *Frequência Média*  
*Largura da Janela*  
*Princípio da Janela*  
*Fim da Janela*

### ■ Onduletas

◇ As onduletas são átomos tempo–frequência gerados pelas translações e dilatações de uma onduleta–mãe  $\psi(t)$

$$g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (156)$$

### ● Caixas de Heisenberg

■ Os átomos  $g_{\mathbf{k}}(t)$  estão centrados em  $t = \langle t \rangle_{\mathbf{k}}$  onde

$$\langle t \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} t |g_{\mathbf{k}}(t)|^2 dt \quad (157)$$

■ De forma semelhante as transformadas de Fourier  $G_{\mathbf{k}}(\nu)$  estão centradas em  $\nu = \nu_{\mathbf{k}}$  onde

$$\langle \nu \rangle_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu |G_{\mathbf{k}}(\nu)|^2 d\nu \quad (158)$$

■ A localização temporal dos átomos  $g_{\mathbf{k}}(t)$  é dada por

$$\Delta t_{\mathbf{k}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle_{\mathbf{k}})^2 |g_{\mathbf{k}}(t)|^2 dt} \quad (159)$$

■ A localização em frequência dos  $G_{\mathbf{k}}(\nu)$  é de forma análoga

$$\Delta \nu_{\mathbf{k}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\nu - \langle \nu \rangle_{\mathbf{k}})^2 |G_{\mathbf{k}}(\nu)|^2 d\nu} \quad (160)$$

■ A **resolução tempo–frequência** dum átomo  $g_{\mathbf{k}}(t)$  é representada por um rectângulo centrado em  $\{t_{\mathbf{k}}, \nu_{\mathbf{k}}\}$  no plano tempo–frequência, com dimensões  $\Delta t_{\mathbf{k}} \times \Delta \nu_{\mathbf{k}}$ . Já mostrámos anteriormente que

$$\Delta t_{\mathbf{k}} \times \Delta \nu_{\mathbf{k}} \geq \frac{1}{4\pi} \quad (161)$$

- No plano tempo–frequência não existe nenhuma função perfeitamente localizada num ponto  $\{t, \nu\}$ , apenas rectângulos de área  $\geq \frac{1}{4\pi}$  podem associar-se a funções. Assim a energia  $|\langle g_{\mathbf{k}}, f \rangle|^2$  está efectivamente distribuída pela caixa de Heisenberg centrada em  $\{t_{\mathbf{k}}, \nu_{\mathbf{k}}\}$ .

## • Transformadas de Gabor (WFT)

- As transformadas de Fourier de Tempo Finito (ou de Janela) correspondem a escolher uma janela simétrica real  $h(t) = h(-t)$ , normalizada com  $\|h\| = 1$ , e usar átomos de Gabor generalizados com  $\mathbf{k} = \{\tau, \eta\}$

$$g_{\tau, \eta}(t) = h(t - \tau) e^{2\pi i \eta t} \quad (162)$$

- ◇ Como  $h(t) = h(-t)$  a função  $t h(t)$  é ímpar, pelo que obtemos

$$\langle t \rangle_{\tau, \eta} = \int_{-\infty}^{\infty} t |h(t - \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau) |h(t - \tau)|^2 dt + \tau \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)|^2 dt = \tau \quad (163)$$

$$\Delta t_{\tau, \eta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |g_{\tau, \eta}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |h(t - \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |h(t)|^2 dt = \Delta t^2 \quad (164)$$

- ◇ De forma semelhante  $H(\nu) = \mathcal{F}_\nu(h) = H(-\nu)$  é real e simétrica (porque  $H(-\nu)^* = H(\nu) = H(-\nu)$ ) pelo que

$$G_{\tau, \eta}(\nu) = H(\nu - \eta) e^{2\pi i (\nu - \eta)\tau} \quad (170)$$

$$\langle \nu \rangle_{\tau, \eta} = \eta \quad (171)$$

$$\Delta \nu_{\tau, \eta}^2 = \Delta \nu^2 \quad (172)$$

- Vê-se assim que não só a área mas também a largura e altura das caixas de Heisenberg para a WFT é **constante e independente da sua localização**, ou seja a resolução desta transformada é constante em todo o plano tempo–frequência.

### ■ Exemplo

$$f(t) = e^{-2\pi i \xi t} \implies F(\nu) = \delta(\nu - \xi) \quad (173)$$

- ◇ A sua transformada WFT está centrada na frequência  $\langle \eta \rangle = \xi$  e espalha-se numa banda de largura  $\Delta \eta = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |H(\nu)|^2 d\nu}$

$$\mathcal{T}_{\tau, \eta}(f) = \langle g_{\tau, \eta}, f \rangle = \langle G_{\tau, \eta}, F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \xi) H(\nu - \eta) e^{-2\pi i (\nu - \eta)\tau} d\nu = H(\xi - \eta) e^{-2\pi i (\xi - \eta)\tau} \quad (174)$$

### ■ Exemplo

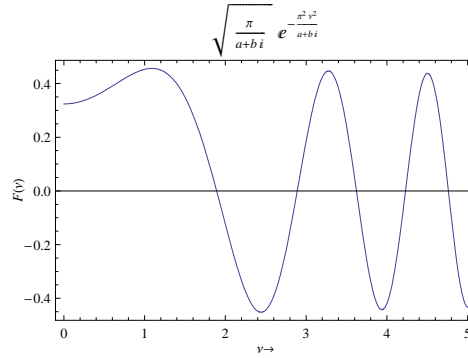
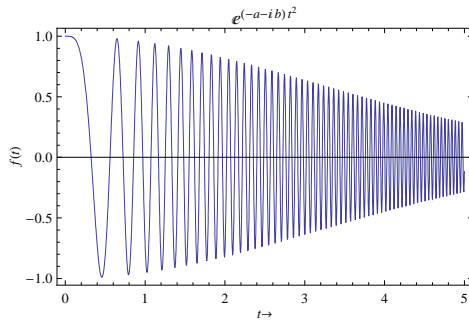
$$f(t) = \delta(t - \zeta) \implies F(\nu) = e^{2\pi i \nu \zeta} \quad (175)$$

- ◇ A sua transformada WFT está centrada no instante  $\langle \tau \rangle = \zeta$  e espalha-se numa banda de largura  $\Delta \tau = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |h(t)|^2 dt}$

$$\mathcal{T}_{\tau, \eta}(f) = \langle g_{\tau, \eta}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \zeta) h(t - \tau) e^{-2\pi i \eta t} dt = h(\zeta - \tau) e^{-2\pi i \eta \zeta} \quad (176)$$

### ■ Chilro

$$f(t) = e^{-(a+ib)t^2} \implies F(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a+ib}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{a+ib}} \quad (177)$$



■ Fórmula de inversão da WFT

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle g_{\tau, \eta}, f \rangle g_{\tau, \eta}(t) d\eta d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_{\tau, \eta}(f) h(t - \tau) e^{2\pi i \eta t} d\eta d\tau \quad (178)$$

■ Identidade de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle g_{\tau, \eta}, f \rangle|^2 d\eta d\tau \quad (179)$$

■ Função de Ambiguidade

- ◇ A representação  $\mathcal{T}_{\tau, \eta}(f)$  de uma função  $f(t)$  é altamente redundante, o que significa que uma função  $\Phi(\tau, \eta)$  não é em geral a transformada de uma  $f(t)$ . A condição necessária e suficiente para que  $\Phi(\tau, \eta) = \mathcal{T}_{\tau, \eta}(f)$  é que

$$\Phi(\tau, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, \nu) \langle g_{t, \nu}, g_{\tau, \eta} \rangle dt d\nu \quad (180)$$

- ◇ O kernel replicativo  $K(t, \tau; \nu, \eta) = \langle g_{t, \nu}, g_{\tau, \eta} \rangle$  mede a sobreposição em tempo-frequência dos átomos  $g_{t, \nu}$  e  $g_{\tau, \eta}$ , e decai com  $t - \tau$  e  $\nu - \eta$ . A sua expressão pode escrever-se usando a mudança de variável  $s \rightarrow s + \frac{1}{2}(t + \tau)$

$$K(t, \tau; \nu, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s - t) h(s - \tau) e^{2\pi i(\eta - \nu)s} ds = e^{-2i\pi(\nu - \eta)\left(\frac{t + \tau}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(s + \frac{1}{2}(t - \tau)\right) h\left(s - \frac{1}{2}(t - \tau)\right) e^{-2i\pi(\nu - \eta)s} ds \quad (181)$$

$$K(t, \tau; \nu, \eta) = e^{-2i\pi(\nu - \eta)\left(\frac{t + \tau}{2}\right)} \mathcal{A}_{t - \tau, \nu - \eta}(h) \quad (182)$$

- ◇ A função de Ambiguidade  $\mathcal{A}_{t, \nu}(h)$  mede a largura de  $h(t)$  em tempo e de  $H(\nu)$  em frequência

$$\mathcal{A}_{t, \nu}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(s + \frac{t}{2}\right) h\left(s - \frac{t}{2}\right) e^{-2i\pi \nu s} ds \quad (183)$$

● Transformadas de onduleta

- ◇ No caso das onduletas os átomos tempo-frequência são gerados pelas translações e dilatações de uma onduleta-mãe  $\psi(t)$

$$g_{a,b}(t) \equiv \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (184)$$

$$\mathcal{T}_{a,b}(f) \equiv \mathbf{w}_{a,b}(f) = \langle \psi_{a,b}, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt \quad (185)$$

- ◇ Assumindo que  $\|\psi\| = 1$

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt = 0 \quad (186)$$

A onduleta  $\psi_{a,b}(t)$  está centrada em  $b$

$$\langle t \rangle_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (b+a\tau) |\psi(\tau)|^2 d\tau = b \quad (187)$$

◇ A sua variância é proporcional à da onduleta mãe pelo factor de escala

$$\Delta t_{a,b}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 \left| \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right|^2 dt = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\psi(\tau)|^2 d\tau = a^2 \Delta t^2 \quad (188)$$

◇ Uma onduleta analítica tem transformada de Fourier nula nas frequências negativas. Assim, designando por  $\Psi(\nu) = \mathcal{F}_\nu(\psi)$

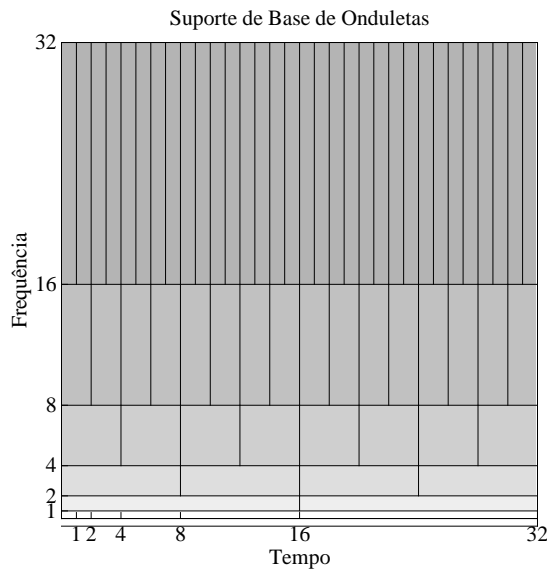
$$\langle \nu \rangle = \int_0^{\infty} \nu |\Psi(\nu)|^2 d\nu \quad (189)$$

$$\langle \nu \rangle_{a,b} = \int_0^{\infty} \nu |\Psi_{a,b}(\nu)|^2 d\nu = \int_0^{\infty} \nu |\sqrt{a} \Psi(a\nu) e^{2\pi i b \nu}|^2 d\nu = \frac{1}{a} \langle \nu \rangle \quad (190)$$

$$\Delta \nu_{a,b}^2 = \int_0^{\infty} \left( \nu - \frac{\langle \nu \rangle}{a} \right)^2 |\Psi_{a,b}(\nu)|^2 d\nu = \frac{1}{a^2} \Delta \nu^2 \quad (191)$$

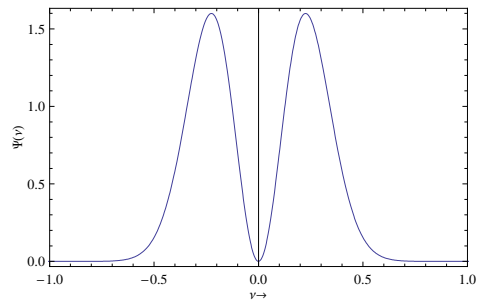
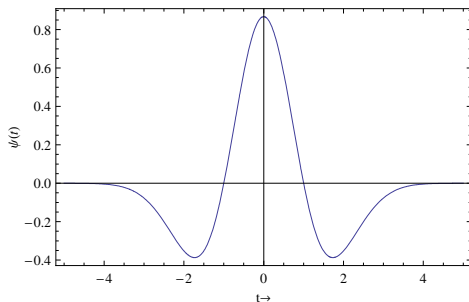
◇ As caixas de Heisenberg dos átomos tempo-frequência de onduletas  $\psi_{a,b}$  têm igualmente área constante

$\Delta t_{a,b} \times \Delta \nu_{a,b} = \Delta t \times \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$  mas agora as suas dimensões são variáveis, ou seja a resolução em tempo escala com  $a$  e em frequência com  $\frac{1}{a}$ .



◇ Exemplo: Onduletas de Marr (Mexican Hat) Laplaciano de Gaussiana  $G(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$  normalizada

$$\psi(t) = \nabla^2 G(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3} \sigma} \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_\nu(\psi) = \Psi(\nu) = -4 \sqrt{\frac{8}{3}} \sigma^{5/2} \pi^{9/4} \nu^2 e^{-2\pi^2 \sigma^2 \nu^2} \quad (192)$$



• **Representações Sesquilineares (Wigner–Ville)**

- Transformadas Wigner–Ville foram estudadas como uma forma de calcular a frequência instantânea de um sinal.
- Função de Distribuição de Wigner

$$\mathcal{W}_{\tau,\nu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau + \frac{1}{2}t\right) f^*\left(\tau - \frac{1}{2}t\right) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (193)$$

$$|f(\tau)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{\tau\nu}(f) d\nu \quad (194)$$

◇ A inversão apenas é conhecida a menos de um factor de fase constante.

$$f(t) f^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{t/2,\nu}(f) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad (195)$$

■ Função de Ambiguidade de Woodward

◇ Aparece no processamento de sinais de radar, medindo a semelhança entre um sinal e sua versão retardada e com efeito Doppler.

$$\mathcal{A}_{\tau,\nu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) f^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (196)$$

◇ Também se pode escrever em termos da distribuição de Wigner

$$\mathcal{A}_{\tau,\nu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{t,\eta}(f) e^{2\pi i (\eta\tau - \nu t)} d\eta dt \quad (197)$$

■ Transformadas de Fourier Fraccionárias

◇ Designando a Transformada de Fourier de  $f(t)$  por  $F(\nu) = \mathcal{F}_{\nu}(f)$  obtemos

$$\mathcal{W}_{\nu,\tau}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\nu + \frac{1}{2}\eta\right) F^*\left(\nu - \frac{1}{2}\eta\right) e^{-2\pi i \eta \tau} d\eta \quad (198)$$

◇ Por outro lado

$$\mathcal{W}_{\tau,\nu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\nu + \frac{1}{2}\eta\right) F^*\left(\nu - \frac{1}{2}\eta\right) e^{2\pi i \eta \tau} d\eta \quad (199)$$

◇ A relação entre estas transformadas mostra no plano  $\{\tau, \nu\}$  uma função é a rotação da outra por  $\pi/2$ .

$$\mathcal{W}_{\nu,\tau}(F) = \mathcal{W}_{-\tau,\nu}(f) \quad (200)$$

■ Para calcular a Transformada de Fourier de  $f(t)$  basta calcular

- a) a distribuição de Wigner  $\mathcal{W}_{\tau,\nu}(f)$
  - b) Rodá-la de  $\frac{\pi}{2}$
  - c) Calcular a sua inversão.
- As Transformadas de Fourier de ordem fraccionária  $p$  correspondem a fazer rotações de  $\phi = p \times \frac{\pi}{2}$  no passo b). Uma forma explícita é

$$\mathcal{F}_{\nu}^{(p)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \left(t\nu - \frac{1}{2}(t^2 + \nu^2) \cos[\phi]\right) C_{sc}[\phi]} dt \quad (201)$$