

Representações Lineares: Transformadas Contínuas e Discretas

■ Vantagens de usar transformadas e representações contínuas

- Simplicidade das formulas.
- Vários teoremas importantes relacionam as amplitudes dos coeficientes da decomposição do sinal f com a regularidade local do sinal.
- No caso das onduletas, as dilatações arbitrárias não estão definidas sobre sequências discretas.
- A regularidade de sequências discretas não está bem definida.
- O estudo assintótico de funções contínuas implica resultados para sequências discretas onde o intervalo entre amostras tende para zero.

■ Por outro lado:

- A amostragem uniforme de bases contínuas redundantes (por exemplo onduletas) não produz bases ortonormadas discretas.
- A restrição do contínuo para o discreto introduz problemas de fronteira que têm que ser resolvidos por métodos discretos.

● Transformadas de Fourier

- A teoria de transformadas de Fourier em $L_2(\mathbb{R})$ foi desenvolvida por Plancherel no princípio do séc.XX.
- De acordo com esta teoria as funções $e^{-2\pi i \nu t}$ formam uma base ortonormada contínua de $L_2(\mathbb{R})$, e as funções $e^{2\pi i \nu t}$ são a sua base dual.
- Em geral a definição depende de dois parâmetros $\{a, b\}$

$$\mathcal{F}_\nu(f) \equiv F(\nu) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i b \nu t} dt$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}(F) \equiv f(t) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i b \nu t} d\nu$$

(57)

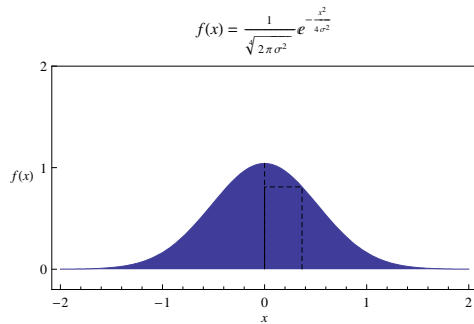
- Nas definições seguintes usamos $\{a, b\} = \{0, 2\pi\}$.

$$\mathcal{F}_\nu(f) \equiv F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i \nu t} dt \quad (58)$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}(F) \equiv f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu$$

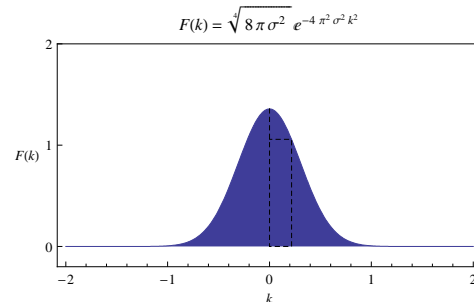
■ A função gaussiana $f(x) = A e^{-Bx^2}$

$\sigma = 0.36788$



$$\Delta x = \sigma$$

$$\|f\| = 1$$



$$\Delta k = \frac{1}{4\pi\sigma}$$

$$\|F\| = 1$$

(59)

■ A transformada inversa dá a gaussiana original

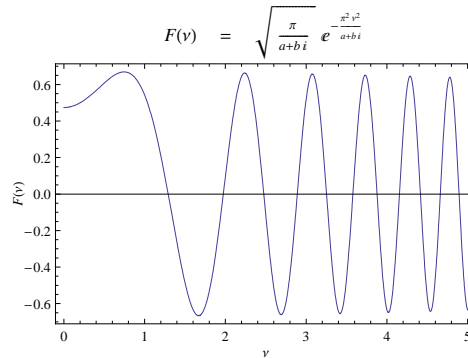
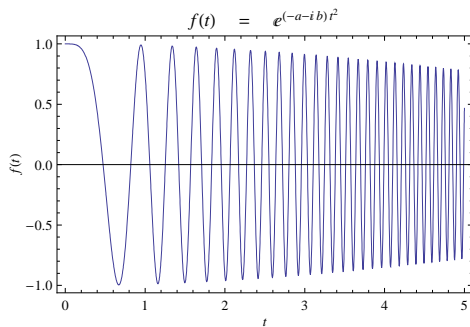
■ Chירו Gaussiano

$$f(t) = e^{-(a+ib)t^2}$$

;

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a+ib}} e^{-\frac{\pi^2 \omega^2}{a+ib}}$$

(60)



• Propriedades da transformada de Fourier

■ Linearidade

$$\mathcal{F}_\nu(Af + Bg) = A \mathcal{F}_\nu(f) + B \mathcal{F}_\nu(g) \equiv AF(\nu) + BG(\nu) \quad (61)$$

■ Simetria

■ Translação

$$T_a f(t) = f(t - a) \implies \mathcal{F}_v(T_a f) = e^{2\pi i a v} \mathcal{F}_v(f) \quad (67)$$

$$F_a(v) = e^{2\pi i a v} F(v)$$

■ Modulação

$$M_\eta f(t) = e^{2\pi i \eta t} f(t) \implies \mathcal{F}_v(M_\eta f) = \mathcal{F}_{v-\eta}(f) \quad (68)$$

$$F_\eta(v) = F(v - \eta)$$

■ Dilatação:

$$S_\lambda f(t) = f(\lambda t) \implies \mathcal{F}_v(S_\lambda f) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}_{\frac{v}{\lambda}}(f) \quad (69)$$

$$F_\lambda(v) = \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{v}{\lambda}\right)$$

■ Derivação:

$$\mathcal{F}_v\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = (2\pi i v)^n \mathcal{F}_v(f) \quad (70)$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left(\frac{d^n F}{dv^n}\right) = (-2\pi i t)^n f(t) \quad (71)$$

■ Momentos:

$$m_p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^p f(t) dt = (2\pi i)^{-p} \left(\frac{\partial^p F}{\partial v^p}\right)(0) \quad (72)$$

■ Convolução

$$h(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(t - \xi) d\xi \implies \mathcal{F}_v(f * g) = \mathcal{F}_v(f) \mathcal{F}_v(g) \quad (73)$$

$$H(v) = F(v) G(v)$$

■ Correlação

$$h(t) = \text{Corr}(f, g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \xi) g(\xi) d\xi \implies \mathcal{F}_v[\text{Corr}(f, g)] = \mathcal{F}_v(f) \mathcal{F}_v(g)^* \quad (74)$$

$$H(v) = F(v) G^*(v)$$

■ Auto-Correlação (Wiener-Khinchin):

$$\mathcal{F}_v(\text{Corr}(f, f)) = |\mathcal{F}_v(f)|^2 \quad (75)$$

■ Potência Espectral (Parseval) :

$$\mathcal{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_\nu(f)|^2 d\nu \quad (76)$$

- O produto das variâncias duma função $f(t)$ e da sua transformada de Fourier $F(\nu)$ é sempre superior a $\frac{1}{4\pi}$.

- Desigualdade de Schwarz

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2 \quad (77)$$

- Consideremos uma função $f \in L_2(\mathbb{R})$ devidamente normalizada $\|f\|^2 = 1$. A sua **variância** em relação à origem é

$$\sigma_t^2 = \|t f\|^2 \quad (78)$$

- De forma semelhante para a sua transformada de Fourier $F(\nu)$, que pela identidade de Parseval tem a mesma energia $\|F\|^2 = 1$, pelo que a sua **variância**

$$\sigma_\nu^2 = \|\nu F\|^2 \quad (79)$$

- Pelas propriedades da transformada de Fourier das derivadas

$$\nu F(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{F}_\nu \left(\frac{df}{dt} \right) \quad (80)$$

$$\sigma_\nu^2 = \|\nu F\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\| \mathcal{F}_\nu \left(\frac{df}{dt} \right) \right\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\| \frac{df}{dt} \right\|^2$$

- Aplicando a desigualdade de Schwarz

$$\left| \left\langle t f, \frac{df}{dt} \right\rangle \right|^2 \leq \|t f\|^2 \left\| \frac{df}{dt} \right\|^2 = 4\pi^2 \sigma_t^2 \sigma_\nu^2 \quad (81)$$

$$\left\langle t f, \frac{df}{dt} \right\rangle = \left\langle f, t \frac{df}{dt} \right\rangle = \left\langle f, \frac{d(t f)}{dt} - f \right\rangle = -\|f\|^2 + \left\langle f, \frac{d(t f)}{dt} \right\rangle = -\|f\|^2 - \left\langle \frac{df}{dt}, t f \right\rangle \quad (82)$$

$$\left\langle t f, \frac{df}{dt} \right\rangle = -\frac{\|f\|^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

- Em conclusão, introduzindo este resultado em (81) obtém-se

$$\frac{1}{4} \leq 4\pi^2 \sigma_t^2 \sigma_\nu^2 \quad (83)$$

$$\sigma_t \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

- A desigualdade de Schwarz (81) só é uma igualdade se

$$\frac{df}{dt}(t) = B t f(t) \quad \implies \quad f(t) = A e^{\frac{B}{2}t^2}$$

$$\left| \left\langle t f, \frac{df}{dt} \right\rangle \right|^2 = |\langle t f, B t f \rangle|^2 = \|t f\|^2 \|B t f\|^2 = B^2 \|f\|^4$$

- Se uma função $f \neq 0 \in L_2(\mathbb{R})$ tem suporte compacto, então a sua transformada de Fourier $F(\nu)$ não se pode ser constantemente zero em qualquer intervalo.

■ Demonstração:

- ◇ Suponhamos que $F(\nu)$ tem suporte no intervalo $[-\nu_1, \nu_1]$.

$$f(t) = \int_{-\nu_1}^{\nu_1} F(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \quad (85)$$

- ◇ Como f tem suporte compacto existe um intervalo $[t_1, t_2]$ onde $f(t) = 0$. Em $t_o = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{2}$ tem-se

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t_o) = 0 = \int_{-\nu_1}^{\nu_1} F(\nu) (-2\pi i \nu)^n e^{-2\pi i \nu t_o} d\nu \quad (86)$$

- ◇ Expandindo a exponencial em (85) obtemos para qualquer t

$$f(t) = \int_{-\nu_1}^{\nu_1} F(\nu) e^{-2\pi i \nu (t-t_o)} e^{-2\pi i \nu t_o} d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-t_o)^n \int_{-\nu_1}^{\nu_1} F(\nu) (-2\pi i \nu)^n e^{-2\pi i \nu t_o} d\nu = 0 \quad (87)$$

- ◇ Isto contradiz a hipótese de que $f \neq 0$.

■ Filtros Lineares Invariantes

- A transformada de Fourier diagonaliza todos os **operadores lineares invariantes por translação**, ou seja operadores para os quais um atraso no sinal de entrada se reflecte no mesmo atraso no sinal de saída.

$$g(t) = (\mathbb{L} f)(t) \quad \implies \quad g_\tau(t) = (\mathbb{L} f_\tau)(t) \quad \therefore \quad \mathbb{T}_\tau \mathbb{L} = \mathbb{L} \mathbb{T}_\tau \quad (88)$$

$$f_\tau(t) = f(t - \tau) = (\mathbb{T}_\tau f)(t) \quad ; \quad g_\tau(t) = g(t - \tau) = (\mathbb{T}_\tau g)(t)$$

- Transmissão de sinal, redução de ruído estacionário e codificação predictiva são exemplos de operações implementadas por operadores deste tipo, também designados por **filtros lineares invariantes**.

- A **resposta impulsiva** do operador \mathbb{L} é o resultado da sua acção sobre um impulso, i.e. o delta de Dirac $\delta(t)$

$$h(t) = \mathbb{L} \delta(t) \quad (89)$$

- Como qualquer f bem comportado verifica

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathbb{T}_\tau \delta(t) d\tau \quad (90)$$

$$(\mathbb{L} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathbb{L} \mathbb{T}_\tau \delta(t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathbb{T}_\tau \mathbb{L} \delta(t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathbb{T}_\tau h(t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (91)$$

- A acção de um **filtro linear invariante** é assim equivalente à convolução com a sua **resposta impulsiva** h .

$$(\mathbb{L} f)(t) = (f * h)(t) \quad (92)$$

■ Funções de Transferência

- Para qualquer **filtro linear invariante** vemos que com $f(t) = e^{-2\pi i \nu t}$ se obtém

$$\mathbb{L} e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i \nu(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{2\pi i \nu \tau} d\tau \right) e^{-i\omega t} = H(\nu) e^{-2\pi i \nu t} \quad (93)$$

- Assim as funções $e^{-2\pi i \nu t}$ são **vectoros próprios** de todos os **operadores lineares invariantes**, e os seus **valores próprios** são as transformadas de Fourier $H(\nu)$ das suas respostas impulsivas $h(t)$.
- A identificação de cada **operador linear invariante** \mathbb{L} com um **filtro em frequência** $H(\nu)$ que atenua ou amplifica cada componente sinusoidal $e^{-2\pi i \nu t}$ vem da representação

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \quad (94)$$

$$g(t) = (\mathbb{L} f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \mathbb{L} e^{-2\pi i \nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) H(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu$$

- A transformada de Fourier $H(\nu)$ da resposta impulsiva $h(t)$ designa-se **função de transferência** porque em termos de transformadas de Fourier

$$G(\nu) = H(\nu) F(\nu) \quad (95)$$

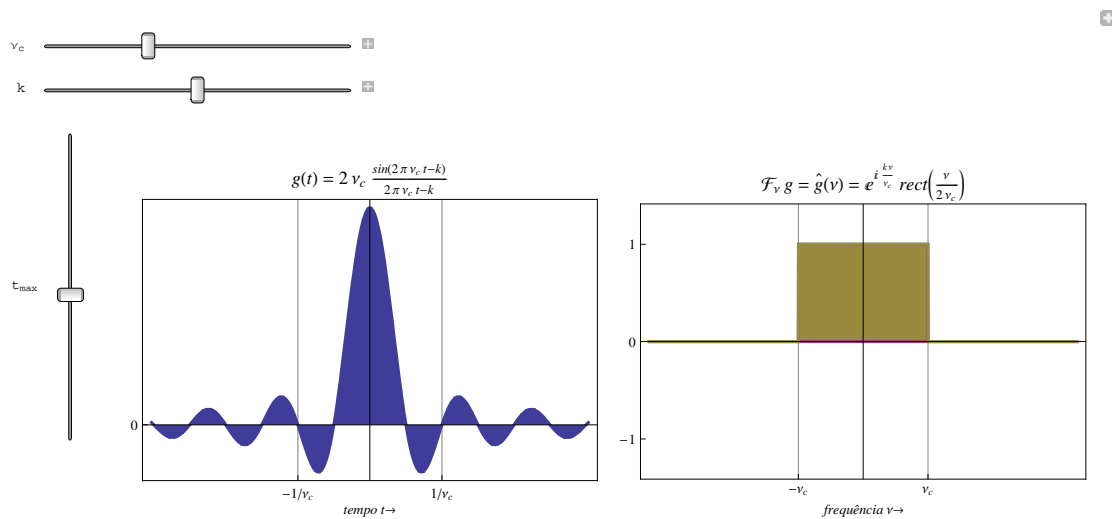
- Um filtro diz-se **causal** se $(\mathbb{L} f)(t)$ não depende dos valores de $f(t + \tau)$ para $\tau > 0$. Isto significa que $h(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ já que

$$(\mathbb{L} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (96)$$

■ Teoria de Amostragem, funções de espectro limitado

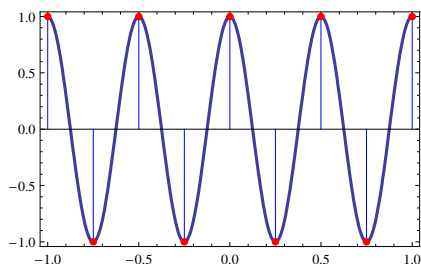
- **As funções de Banda Limitada** ($\mathcal{F}_\omega(f) = 0$ se $\omega \notin [\omega_i, \omega_f]$) **são diferenciáveis e devem ter suporte infinito (porque o suporte dual é compacto)**.
 - O Teorema de Paley–Wiener mostra que se a transformada de Fourier de uma função $f(z)$ tem suporte compacto, então $f(z)$ é uma função inteira (i.e. tem uma expansão em série de Taylor.)
 - Uma forma de obter funções de banda limitada é fazer a sua convolução com um filtro ideal passa-baixos.
 - Um filtro ideal passa-baixos tem que ter um suporte infinito para que a sua transformada de Fourier possa ter um suporte compacto.

Filtragem Passa-Baixas ideal com uma frequência máxima ν_c é equivalente à convolução com uma função $g(t) = 2 \nu_c \operatorname{sinc}(2 \nu_c t)$ já que a sua transformada de Fourier é $\mathcal{F}_\nu(g) = \operatorname{rect}\left[\frac{\nu}{2\nu_c}\right]$.

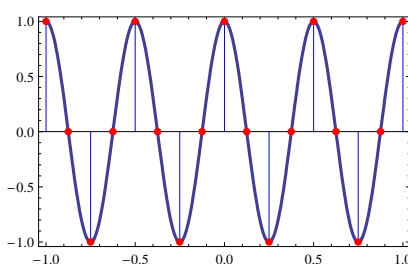


- O espaço de funções de banda limitada em \mathbb{R} é o espaço de Paley–Wiener. As funções deste espaço podem ser reconstruídas exactamente a partir de amostragens uniformes.

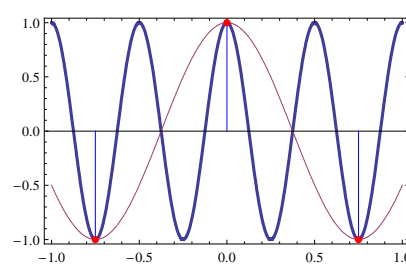
$$\left\{ \begin{array}{l} N = 2^n \quad \rightarrow \text{Lista de valores complexos } f[t_i] \\ sr = \frac{N}{t_{\max} - t_{\min}} \quad \rightarrow \text{Taxa de Amostragem} \\ ny = \frac{1}{2} sr \quad \rightarrow \text{Frequência de Nyquist} \\ \Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{N} \quad \rightarrow \text{Resolução da Amostragem} \end{array} \right. \quad (97)$$



Taxa de Amostragem $\frac{N}{T}$ e Frequência de Nyquist associada $\nu_c = \frac{1}{2} \frac{N}{T}$ para o sinal $\operatorname{Cos}[2\pi\nu_c t]$



Amostragem redundante para o sinal $\operatorname{Cos}[2\pi\nu_c t]$



Sub-amostragem e aliasing do sinal $\operatorname{Cos}[2\pi\nu_c t]$

■ Teorema de Whittaker–Shannon para funções de banda-limitada em $[-v_c, v_c]$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2v_c}\right) \text{sinc}(2v_c t - k) \quad (98)$$

■ Demonstração

$$f(t) = \int_{-v_c}^{v_c} F(v) e^{2\pi i v t} dv \quad (99)$$

$$F(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi i v \frac{k}{2v_c}} \quad (100)$$

$$c_k = \frac{1}{2v_c} \int_{-v_c}^{v_c} F(v) e^{2\pi i v \frac{k}{2v_c}} dv = \frac{1}{2v_c} f\left(\frac{k}{2v_c}\right) \quad (101)$$

$$f(t) = \int_{-v_c}^{v_c} F(v) e^{2\pi i v t} dv = \int_{-v_c}^{v_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2v_c} f\left(\frac{k}{2v_c}\right) e^{-2\pi i v \frac{k}{2v_c}} e^{2\pi i v t} dv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2v_c}\right) \text{sinc}(\pi(2t v_c - k)) \quad (102)$$

$$\frac{1}{2v_c} \int_{-v_c}^{v_c} e^{-2\pi i v \frac{k}{2v_c}} e^{2\pi i v t} dv = \frac{\text{Sin}[\pi(2t v_c - k)]}{\pi(2t v_c - k)} \quad (103)$$

Transformadas de Fourier Discretas

■ Séries de Fourier

■ A série de Fourier faz corresponder a uma função real de suporte compacto uma sequência numerável de coeficientes em $\ell^2_{\mathbb{C}}$. Esta mesma sequência corresponde também à representação duma função periódica em \mathbb{R} .

■ Para funções periódicas no intervalo $[-L, L]$

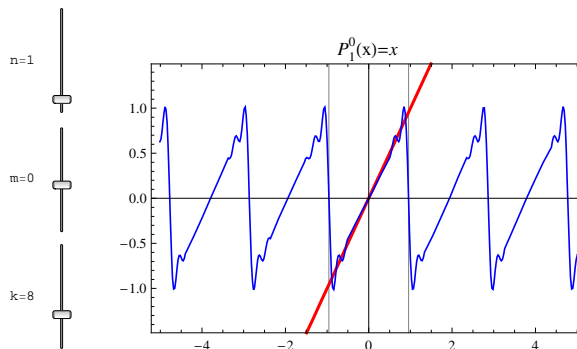
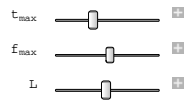
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

■ Em termos de exponenciais complexos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} t}$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) e^{-i \frac{n\pi}{L} t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n - i b_n) & (n > 0) \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + i b_{-n}) & (n < 0) \\ \frac{1}{2} a_0 & (n = 0) \end{cases}$$



■ **Fórmula de Soma de Poisson**

- Considere-se uma função $g(t)$ não periódica.
- Forma-se uma função $g_p(t)$ **periódica** de período L somando todas as réplicas de translações discretas por múltiplos de L

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbb{T}_{nL} g)(t) \quad (104)$$

- Esta função periódica tem uma representação exacta em termos de uma série de Fourier

$$g_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \frac{t}{L}} \quad (105)$$

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} g_p(t) e^{-2\pi i k \frac{t}{L}} dt = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L/2+nL}^{L/2+nL} g(s) e^{-2\pi i k \frac{s+nL}{L}} ds = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L/2+nL}^{L/2+nL} g(s) e^{-2\pi i k \frac{s}{L}} ds = \frac{1}{L} G\left(\frac{k}{L}\right) \quad (106)$$

- A partir de (105) e (106) obtém-se a **fórmula de soma de Poisson**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nL) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{k}{L}\right) e^{2\pi i k \frac{t}{L}} \quad (107)$$

- Para $t = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nL) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{k}{L}\right) \quad (108)$$

- A vantagem desta fórmula é converter uma série lentamente convergente numa série rapidamente convergente. Por exemplo para uma gaussiana

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{4\sigma}} \quad ; \quad G(y) = e^{-4\sigma\pi^2 y^2} \quad (109)$$

- Quando $\sigma \ll 1$ o lado esquerdo converge mais rapidamente. Quando $\sigma \gg 1$ o lado direito converge melhor.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4\sigma}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-4\sigma\pi^2 k^2} \quad (110)$$

■ **Transformadas de sinais discretizados (DTFT)**

- Para funções discretizadas com N amostras f_k

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \times \left(e^{-\frac{2\pi}{N} i} \right)^{nk} \quad ; \quad f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \times \left(e^{-\frac{2\pi}{N} i} \right)^{-nk} \quad (111)$$

■ Transformadas Rápidas de Fourier (FFT)

- Gauss descobriu a FFT em 1805, 2 anos antes do trabalho de Fourier (só publicado em 1866), e Runge em 1905.
- A transformada rápida de Fourier baseia-se no reconhecimento de que as potências $n k$ da N -raiz da unidade $\zeta_N = e^{-\frac{2\pi}{N}i}$ não são todas independentes.
- Para um sinal com $N = 2 M = 2^K$ pontos (caso contrário extenda-se com zeros ou outro método anti-aliasing)

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \zeta_N^{nk} = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s} \zeta_{2M}^{n(2s)} + \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s+1} \zeta_{2M}^{n(2s+1)} \quad (112)$$

- Como $(\zeta_{2M})^2 = \zeta_M$

$$F_n = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s} (\zeta_M^n)^s + \zeta_{2M}^n \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s+1} (\zeta_M^n)^s \quad (113)$$

- Separando o sinal em duas partes de comprimento M por decimação, obtemos as transformadas parciais de sinais com M elementos. Quando $n \leq M$

$$F_n^{(par)} = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s} \zeta_M^{ns} \quad (114)$$

$$F_n^{(impar)} = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s+1} \zeta_M^{ns}$$

- Para $M < n' \leq 2M$ tem-se a partir de $\zeta_M^M = 1$ e $\zeta_{2M}^M = -1$, com $n = n' - M$

$$F_{n'=n+M}^{(par)} = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s} (\zeta_M^M)^s \zeta_M^{ns} = F_n^{(par)} \quad (115)$$

$$F_{n'=n+M}^{(impar)} = \sum_{s=0}^{M-1} f_{2s+1} (\zeta_M^M)^s \zeta_M^{ns} = F_n^{(impar)}$$

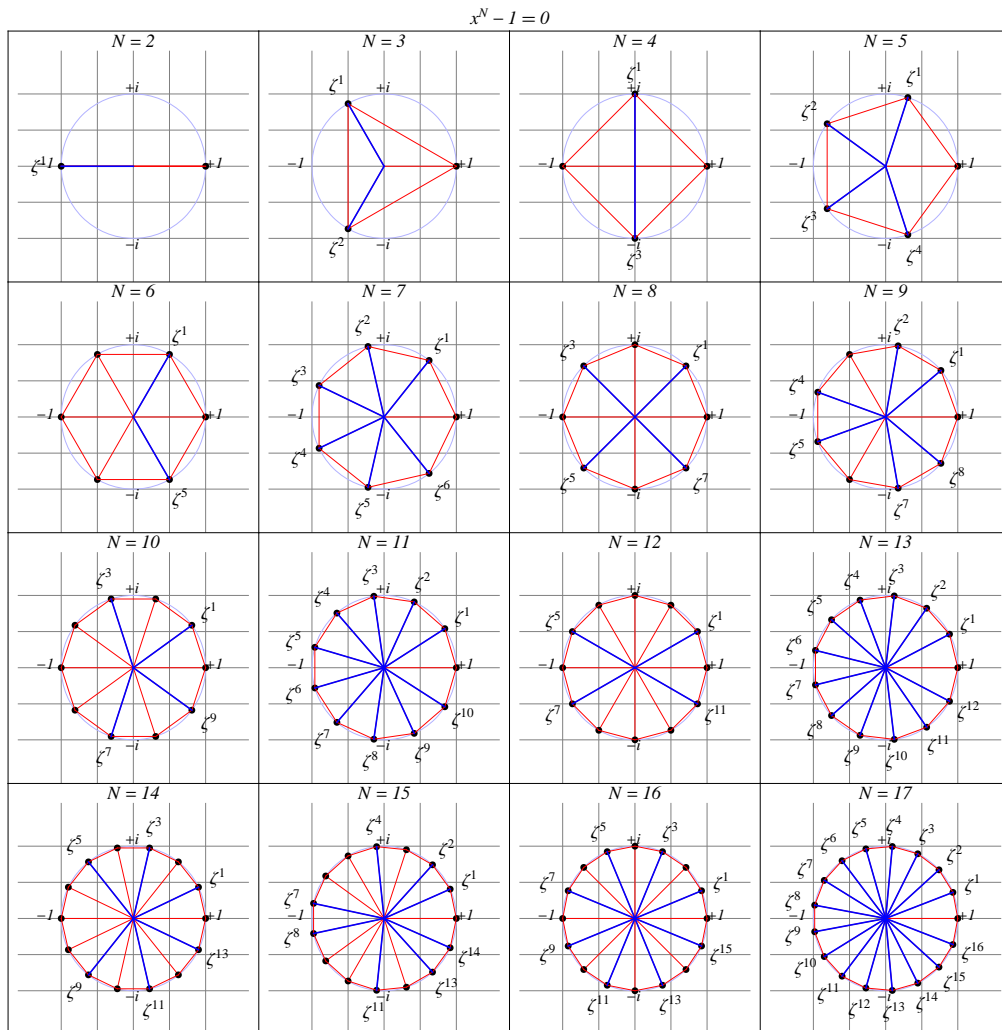
- A expressão para a FFT é assim calculável a partir dos valores para $n \leq M$ de

$$F_n = F_n^{(par)} + \zeta_{2M}^n F_n^{(impar)} \quad (116)$$

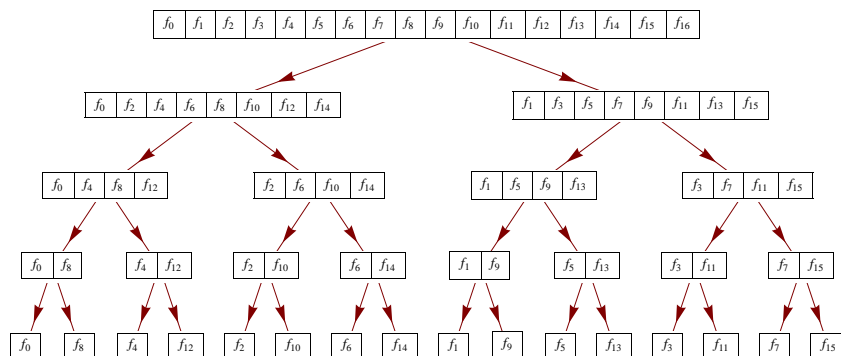
$$F_{n+M} = F_n^{(par)} - \zeta_{2M}^n F_n^{(impar)}$$

- A transformada de cada sinal de $M = \frac{N}{2}$ elementos $F_n^{(par)}$ e $F_n^{(impar)}$ pode ser decomposta de forma idêntica até chegarmos a transformações com um só elemento se $N = 2^K$. Obtemos assim a transformada efectuando $N K = N \text{Log}_2(N)$ operações.

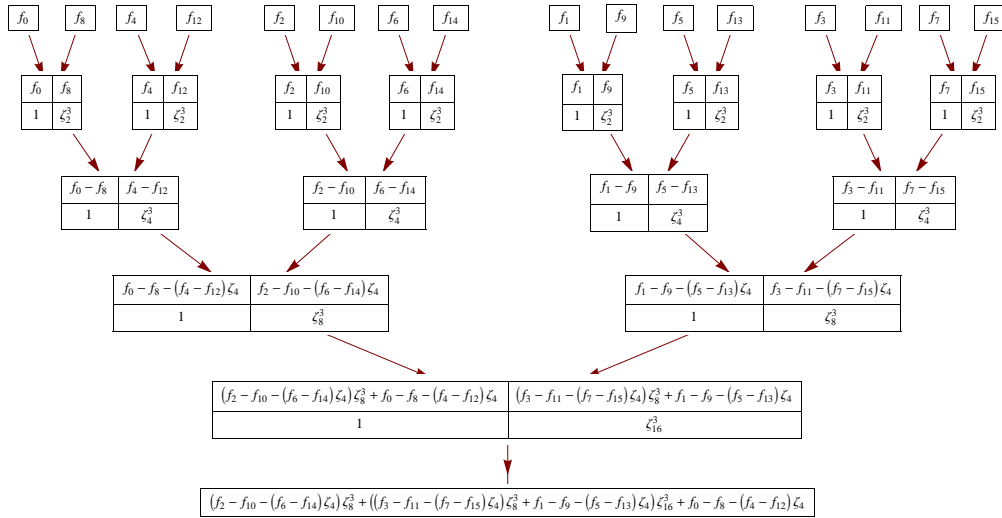
As soluções das primeiras 17 equações ciclotómicas $x^N - 1 = 0$. As raízes primitivas $\zeta^k = e^{-\frac{2\pi}{N}ki}$ onde k e N são co-primos (i.e. o seu máximo divisor comum é a unidade) estão representadas a azul. A conclusão de que o polígono de 17 lados podia ser exactamente construído apenas com régua e compasso foi descoberta por Gauss cerca de 2000 anos depois de se ter conjecturado que nenhum polígono de lados primos com mais de cinco lados podia ser assim exactamente construído.



■ Ordem normal para um esquema iterativo de decimação.



■ Cálculo de F_3 para $N = 2^4$ amostras.



• Notas de Implementação

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 2^n \quad \rightarrow \text{Lista de valores complexos } f[t_i] \\ sr = \frac{N}{t_{max} - t_{min}} \quad \rightarrow \text{Taxa de Amostragem} \\ \nu_c = \frac{1}{2} sr \quad \rightarrow \text{Frequencia de Nyquist} \\ \Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{N} \quad \rightarrow \text{Resolução da Amostragem} \end{array} \right. \quad (117)$$

■ Os algoritmos que implementam a transformada rápida de Fourier assumem que a função a transformar $h(\zeta)$ está definida e amostrada num intervalo $0 \leq \zeta \leq (N - 1) \Delta x$, com valores $q_r = h(\zeta_r)$ onde $\zeta_r = r \Delta x$ para $(r = 0, 1, \dots, N - 1)$.

◇ Daí que, para amostrar e transformar uma função $f(x)$ numa janela $I = [-\frac{\Lambda}{2}, \frac{\Lambda}{2}]$ de largura $\Lambda = N \Delta x$ seja necessário transladar toda a função por $\frac{\Lambda}{2}$, e efectivamente definir uma nova função

$$h(\zeta_r) = f\left(\zeta_r - \frac{\Lambda}{2}\right) = f\left(\left(r - \frac{N}{2}\right)\Delta x\right) \quad (118)$$

◇ No *Mathematica*, a Transformada de Fourier discreta de uma lista $\{q_r\}$ de N pontos é a lista $\{\hat{q}_s\}$ onde

$$\hat{q}_s = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N q_r e^{2\pi i (s'-1) \frac{(r'-1)}{N}} \quad (119)$$

◇ Se pusemos $\Delta\kappa = \frac{2\pi}{\Lambda}$, $s = s' - 1$, $r = r' - 1$ então

$$\hat{q}_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} q_{r+1} e^{i\left(\frac{2\pi}{\Lambda} s\right)r\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} h(\zeta_r) e^{i\kappa_s \zeta_r} \quad (120)$$

O valor da constante κ_s é

$$\kappa_s = \begin{cases} 0 & \text{para } s = 0 \\ s \Delta\kappa & \text{para } s = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{N}{2} \Delta\kappa & \text{para } s = \frac{N}{2} \text{ (aliasing)} \\ (s - N) \Delta\kappa & \text{para } s = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (121)$$

◇ Designando por $x_r = \zeta_r - \frac{\Delta}{2} \equiv \left(r - \frac{N}{2}\right) \Delta x$ os pontos no intervalo \mathcal{I} , podemos reescrever

$$\hat{q}_{s+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} h(\zeta_r) e^{i\kappa_s \zeta_r} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f(x_r) e^{i\kappa_s \left(x_r + \frac{\Delta}{2}\right)} = \sqrt{\Delta x} e^{i\kappa_s \frac{\Delta}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \sum_{r=0}^{N-1} f(x_r) e^{i\kappa_s x_r} \right) = \sqrt{\Delta x} e^{i\pi s} \hat{f}(\kappa_s) \quad (122)$$

◇ Assim conclui-se que

$$\hat{f}(\kappa_s) = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} e^{-i\pi s} \hat{q}_{s+1} \quad (123)$$

◇ Estes coeficientes $\hat{q}_{s'}$ diferem em sinal alterno dos provenientes de implementações C de FFT, onde o primeiro elemento duma lista tem índice 0.

■ Convém ainda indicar que, de acordo com as normas da FFT,

- o primeiro coeficiente $\hat{q}_{s'=1}$ corresponde à frequência ('número de onda') $\kappa_{s'-1} = 0$.
- os primeiros coeficientes $\hat{q}_{s'}$ ($s' = 2, \dots, \frac{N}{2}$) correspondem às frequências positivas $\kappa_{s'-1} = (s' - 1) \Delta\kappa$.
- o coeficiente $\hat{q}_{\frac{N}{2}+1}$ corresponde ao ponto de 'aliasing' $\kappa_{s'-1} = \frac{N}{2} \Delta\kappa = (s' - 1) \Delta\kappa$.
- e os últimos $\hat{q}_{s'}$ ($s' = \frac{N}{2} + 2, \dots, N$) vão das frequências mais negativas para as menos negativas $\kappa_{s'-1} = (s' - 1 - N) \Delta\kappa$.

■ É assim desejável definir um operador `sortft[list]` que produza uma lista $\{p_k\}$ ordenada crescentemente com a frequência: o índice k aqui corresponde portanto a uma frequência $f = \frac{2ny}{ns} \left(k - \frac{ns}{2} - 1\right)$. Note-se ainda que f é uma frequência, e não uma frequência angular $\omega = 2\pi f$.

■ Assim, o resultado de `Fourier[Cdata] → sftdata` não é directamente a transformada de Fourier da discretização, é necessário inverter o sinal dos coeficientes de dois em dois para obter `ftdata` e depois rearranjar com `sortft[ftdata]` para obter os verdadeiros coeficientes! Contudo, para inverter com `InverseFourier` deve-se usar o formato de `sftdata`.

Outras Transformadas Integrais

■ Transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}_s(f) = \frac{1}{\pi} f(s) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{s}\right) \iff \mathcal{H}_s(f) = \mathcal{P}\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{s-t} dt\right] \quad (124)$$

$$\mathcal{H}_t^{-1}(F) = -\frac{1}{\pi} F(t) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{t}\right) \iff \mathcal{H}_t^{-1}(F) = -\mathcal{P}\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \frac{1}{t-s} ds\right]$$

- Aplicável na análise de **filtros de sistemas lineares causais** $h(t < 0) = 0$

$$h(t) = h(t) \text{sign}(t) \quad (125)$$

- A transformada de Fourier da função $\text{sign}(t)$ é uma função generalizada (\mathcal{P} representa o Valor Principal de Cauchy)

$$\mathcal{F}_v(\text{sign}) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{v}\right) \quad (126)$$

$$\mathcal{F}_v(h) = H(v) = \frac{i}{\pi} H(v) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{v}\right) \quad (127)$$

- **Relações de Kramers–Krönig:** as partes reais e imaginárias da função de transferência de um filtro linear causal são um par de transformadas de Hilbert

$$H(v) = \text{Re}(H)(v) + i \text{Im}(H)(v) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(H)(v) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{v}\right) + \frac{i}{\pi} \text{Re}(H)(v) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{v}\right) \quad (128)$$

$$\begin{cases} \text{Re}(H)(v) &= -\mathcal{H}_v(\text{Im}(H)) \\ \text{Im}(H)(v) &= \mathcal{H}_v(\text{Re}(H)) \end{cases} \quad (129)$$

$$H(v) = \text{Re}(H)(v) + i \mathcal{H}_v(\text{Re}(H)) = -\mathcal{H}_v(\text{Im}(H)) + i \text{Im}(H)(v) \quad (130)$$

- **Extensão analítica:** A extensão de uma função real $f(x)$ para uma função analítica $f_a(z)$ no plano complexo é precisamente

$$f_a(z) = f(z) - i \mathcal{H}_z(f) \quad (131)$$

- A transformada de Hilbert permite definir uma **frequência local** de uma função transiente $f(t)$ de forma natural.

- ◇ A Transformada de Fourier de uma Transformada de Hilbert é a transformada de uma convolução.

$$\mathcal{F}_v(\mathcal{H}(f)) = \mathcal{F}_v\left(\frac{1}{\pi} f(s) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{s}\right)\right) = i F(v) \text{sign}(v) \quad (132)$$

- ◇ A Transformada de Fourier da extensão analítica de $f(t)$ é assim, tendo em conta (131)

$$F_a(v) = F(v) (1 + \text{sign}(v)) = \begin{cases} 2F(v) & \text{se } v > 0 \\ 0 & \text{se } v < 0 \end{cases} \quad (133)$$

- ◇ A Transformada Inversa de Fourier permite escrever a extensão analítica de $f(t)$ na forma

$$f_a(t) = 2 \int_0^{\infty} F(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu = |f_a(t)| e^{i\phi_a(t)} \quad (134)$$

■ Por definição a **Frequência Local** do sinal $f(t)$ é a derivada da fase da sua extensão analítica.

$$\nu_a(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_a}{dt}(\tau) \quad (135)$$

◇ Problema: Para funções de espectro muito extenso esta frequência pode não estar incluída no espectro de potências.

■ Funções em quadratura

◇ Qualquer função analítica no plano complexo $f(z)$ tomada sobre qualquer recta $z(t) = t + i(a + bt)$ que deixe todos os polos de um só lado produz duas funções em quadratura $u(t) = \text{Re}(f(z(t)))$ e $v(t) = \text{Im}(f(z(t)))$.

■ Exemplo

◇ Dado o sinal real

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (136)$$

◇ o seu sinal em quadratura vem desfasado de $\frac{\pi}{2}$ e é a sua transformada de Hilbert

$$g(t) = -a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = -\mathcal{H}_t(f) \quad (137)$$

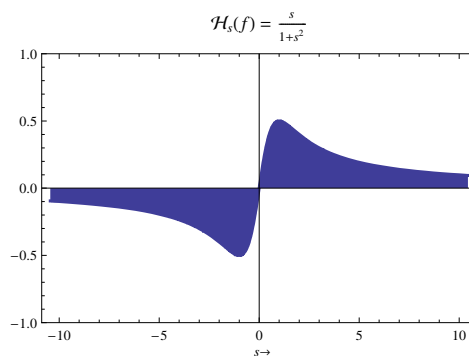
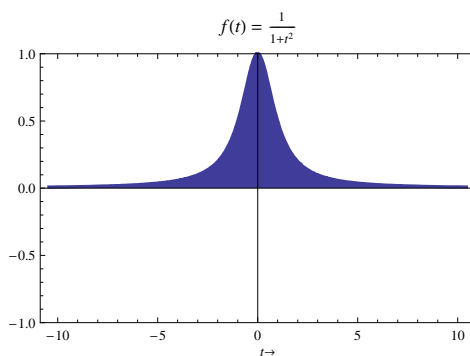
◇ A extensão analítica de $f(t)$ é

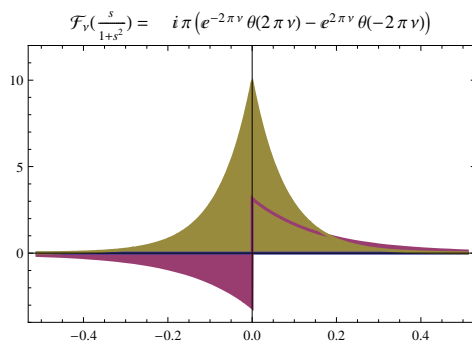
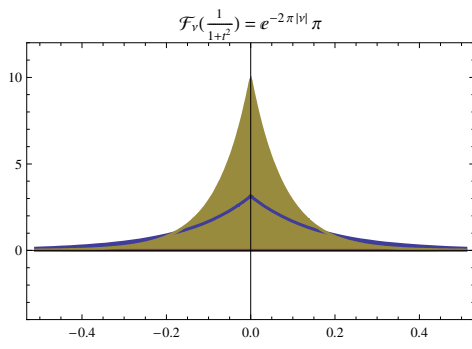
$$f_a(t) = f(t) + i g(t) = (a + ib) e^{-it\omega} \quad (138)$$

■ Exemplo

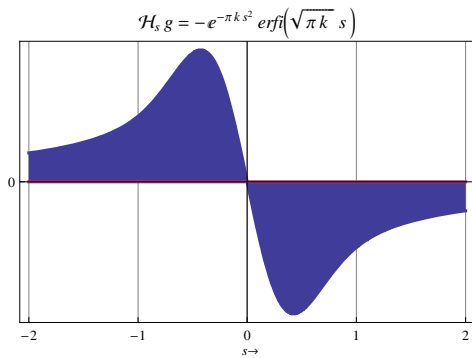
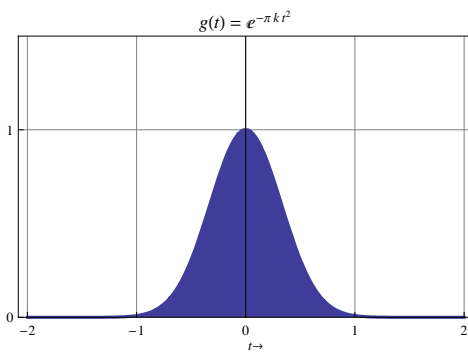
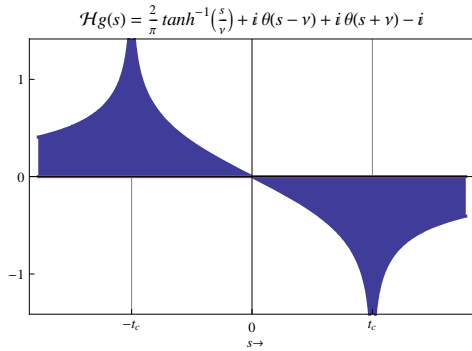
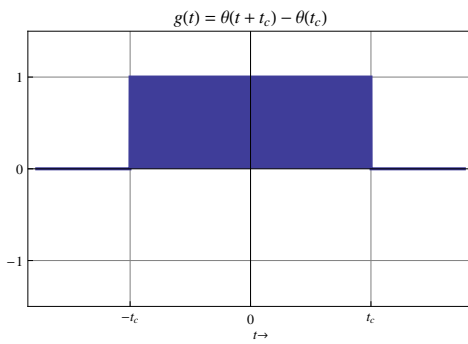
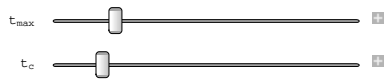
◇ As funções em quadratura têm o **mesmo espectro de potência**. Em termos de sinal audível não poderíamos distinguir um do outro.

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad ; \quad \mathcal{H}_t(f) = \frac{s}{s^2+1} \quad (139)$$





◇ Exemplo



■ Transformadas de Laplace

◇ Aplicável na solução de equações de evolução

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{140}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

◇ Convolução de Laplace

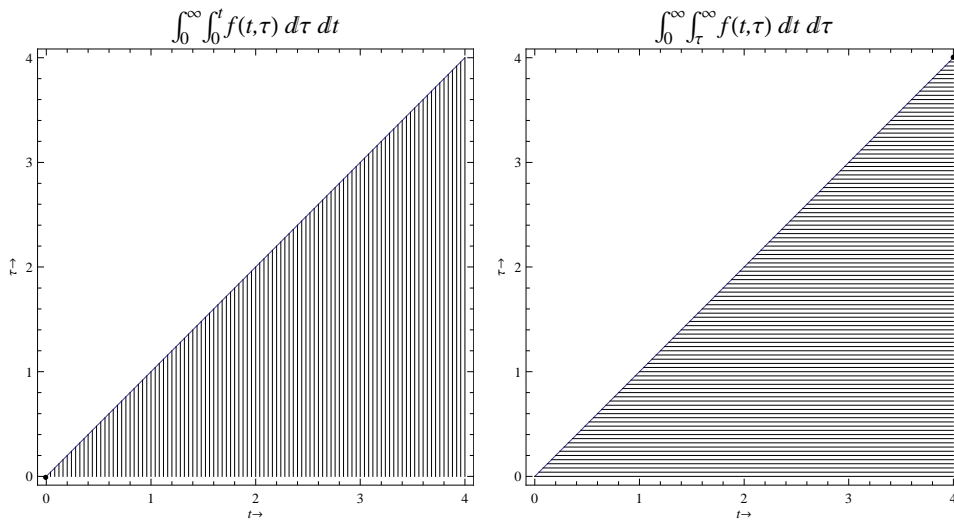
$$\left(g \underset{L}{*} f\right)(t) = \int_0^t g(s) f(t-s) ds \tag{141}$$

◇ Transformada da Convolução de Laplace

$$\mathcal{L}\left(g \underset{L}{*} f\right) = \mathcal{L}(g) \mathcal{L}(f) \tag{142}$$

◇ Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(g \underset{L}{*} f\right) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau dt = \\ \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} g(\tau) f(t-\tau) dt d\tau &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-s(t-\tau)} f(t-\tau) dt = \mathcal{L}(g) \mathcal{L}(f) \end{aligned} \tag{143}$$



■ Transformada-Z

- ◇ Aplicável em problemas envolvendo sinais finitos e suas convoluções, em particular filtros digitais. Dada uma sequência discreta $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ podemos associar-lhe uma função complexa que é, para $z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{Z}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (144)$$

- ◇ Para sinais discretos finitos define-se a convolução

$$\left(g *_L f\right)_n = \sum_{m=0}^n g_m f_{n-m} \quad (145)$$

- ◇ A transformada Z pode ser vista como a discretização da Transformada de Laplace e verifica igualmente

$$\mathcal{Z}\left(g *_L f\right) = \mathcal{Z}(g) \mathcal{Z}(f) \quad (146)$$

- ◇ Prova:

$$\mathcal{Z}\left(g *_L f\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \left(\sum_{m=0}^n g_m f_{n-m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} g_m z^{-m} f_{n-m} z^{-(n-m)} = \sum_{m=0}^{\infty} g_m z^{-m} \sum_{n-m=0}^{\infty} f_{n-m} z^{-(n-m)} = \mathcal{Z}(g) \mathcal{Z}(f) \quad (147)$$

■ Transformadas de Mellin

- ◇ Aplicável a sistemas invariantes em escala

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(-\log(t)) t^{s-1} dt \quad (148)$$

$$\mathcal{M}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) t^{-s} ds$$

■ Transformada de Zak

- ◇ Aplicável no estudo de estados coerentes em QFT e na representação tempo-frequência de sinais e transmissão digital de dados.

$$\mathcal{Z}_a(f)(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t+k}{a}\right) e^{2\pi i \nu k} \quad (149)$$

■ Transformadas de Radon 2D

- ◇ Aplicável no processamento de tomografia axial computadorizada e MRI.

$$\mathcal{R}_2(f)(p, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(\vec{r}) \delta(p - \vec{r} \cdot \vec{e}_r(\varphi)) r dr d\varphi = F(p, \varphi)$$

$$\mathcal{R}_2^{-1}(F)(\vec{r}) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, \varphi) \mathcal{F}^{-1}\left(|\vec{r} \cdot \vec{e}_r(\varphi) - p|\right) dp d\varphi = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(p, \varphi)}{(\vec{r} \cdot \vec{e}_r(\varphi) - p)^2} dp d\varphi \quad (150)$$