Prólogo: Expansões em Série

O objectivo desta aula é mostrar como se podem encontrar bases que permitem a decomposição (análise) e reconstrução (síntese) de funções em espaços de Hilbert de dimensão finita ou infinita. Isto está associado às diversas transformadas discretas e contínuas conhecidas, e é possível mostrar a relação entre estas bases e a decomposição espectral de um operador linear adequado sobre um espaço de Hilbert. Para operadores Hermíticos estas bases são naturalmente obtida através dos seus vectores próprios, mas para operadores não−Hermíticos existe uma construção semelhante designada de Decomposição Singular (SVD) que permite obter conjuntos de vectores que formam as desejadas bases.

Expansão de funções em Bases, "Frames" e Redundância

Espaços de Banach

- Espaços vectoriais normados completos (todas as sequências de Cauchy convergem dentro do espaço)

$$\begin{cases} Norma\ L_1 & \|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx \\ Norma\ L_2 & \|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\ Norma\ L_p & \|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\ Norma\ L_\infty & \|f\|_\infty = max\,|f(x)| \end{cases} \tag{9}$$

- O espaço Euclideano (norma L_2) de dimensão $N < \infty$ é completo. O espaço de polinómios de grau N ou inferior é completo para a norma L_2 mas não para a norma L_∞.

Espaços de Hilbert Separáveis

- Um espaço de Hilbert é uma espaço de Banach com um produto escalar $\langle . , . \rangle$. Um espaço de Hilbert é sempre normado com norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, mas nem todos os espaços normados são de Hilbert (ex: espaços com norma L_p com $p \neq 2$).

- Para funções $f(x)$ num espaço de Hilbert de dimensão infinita não é evidente que exista uma sequência **numerável** de funções ortonormadas $\{g_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que seja possível representá−las na forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, g_i(x) \tag{10}$$

$$f_i = \langle g_i , f \rangle \tag{11}$$

- Quando isso é possível o espaço de Hilbert chama−se **separável.** Os espaços $L_2(\alpha, \beta)$ são separáveis. Os elementos da base numerável verificam

$$\langle g_i , g_j \rangle = \delta_{ij} \tag{12}$$

- Em espaços de Hilbert de dimensão infinita pode−se ter também **bases contínuas ortonormadas** formadas por funções $g_\xi(x)$ com $\xi \in \mathbb{R}$ que verificam

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\xi^*(x)\, g_{\xi'}(x)\, dx = \delta(\xi - \xi') \tag{13}$$

- Note que as funções $g_\xi(x)$ não precisam de pertencer ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de $f(x)$, e os coeficientes $F(\xi)$ não se obtêem através do produto escalar em $\mathcal{H}$. (ex: $e^{2\pi i \xi x} \notin L_2(\mathbb{R})$)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, g_\xi(x)\, d\xi \tag{14}$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_\xi^*(x)\, dx \tag{15}$$

- **Operadores Lineares sobre espaços de Hilbert**
  - Uma forma de representar operadores lineares sobre espaços de Hilbert de dimensão infinita é através de transformadas integrais

$$g = \mathbb{A}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad g(x') = \int_\alpha^\beta h(x', x)\, f(x)\, dx \tag{16}$$

  - Operadores Hermíticos $\left(\mathbb{H}^\dagger = \mathbb{H}\right)$ possuem valores próprios reais e vectores próprios ortogonais (ou ortogonalizáveis).
  - Em espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita, o conjunto infinito numerável de vectores próprios de operadores Hermíticos **compactos** constituem **bases ortonormadas** do espaço de Hilbert.
  - No caso de operadores Hermíticos **não−compactos** com **espectro contínuo** num espaço de Hilbert de dimensão infinita, os vectores próprios não pertencem ao espaço de Hilbert mas podem (ou não) formar uma base ortonormada contínua do espaço de Hilbert. Em Mecânica Quântica os operadores de posição e momento são **não−compactos** e os seus vectores próprios são respectivamente os deltas de Dirac e as exponenciais complexas, e ambos conjuntos podem ser usados como bases de $L_2(\mathbb{R})$.
  - O operador de **Convolução** (kernel $h(x', x) = h(x' - x)$) é **não−compacto**. As funções $e^{2\pi i \xi x}$ são vectores próprios do operador de convolução com kernel $h(x', x) = \delta(x' - x)$. O resultado principal da teoria de Fourier é de que este conjunto de vectores próprios forma uma base ortonormada de $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$.
  - Em Mecânica Quântica muitos operadores são não−compactos, e é um problema difícil provar que os seus vectores próprios formam uma base para o espaço de Hilbert.

- **Representação uma função (sinal) $f(x)$ num espaço de Hilbert como uma soma infinita de elementos de uma família numerável de funções $\left\{g_i(x)\right\}_{i \in \mathbb{Z}}$ na forma**

$$f[x] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i\, g_i(x) \tag{17}$$

As somas parciais devem convergir em norma $lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{|i|<N} c_i\, g_i \right\| = 0$

- De preferência a soma deve ser **convergente incondicionalmente** i.e. converge para o mesmo limite indepedentemente da ordem usada no somatório.

- Deve haver dependência linear entre f e os coeficientes c_k para garantir **estabilidade numérica.**

- **Uma família $\{g_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma base de Riesz se gerar todo o espaço de Hilbert e se existirem constantes $A \geq B > 0$ tais que, para qualquer $c \in \ell^2(\mathbb{R})$**

$$A\,||c||^2 \leq \left\| \sum_i c_i\, g_i \right\|^2 \leq B\,||c||^2 \tag{18}$$

- Uma base de Riesz é uma sequência de Bessel completa, i.e. $span[g_i]$ é denso em $\mathcal{H}$ e para todo o $f \in \mathcal{H}$

$$\sum_i |\langle g_i\,,\ f\rangle|^2 < \infty \tag{19}$$

- Para uma base de Riesz existe uma sequência bi−ortogonal $\{h_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\langle g_i,\, h_j\rangle = \delta_{ij} \tag{20}$$

$$f\,(x) = \sum_i \langle g_i,\ f\rangle\, h_i\,(x) = \sum_i \langle h_i,\ f\rangle\, g_i\,(x) \tag{21}$$

- Numa base a expansão de uma função f gera coeficientes únicamente definidos. Se não exigirmos unicidade podemos usar conjuntos redundantes de funções $\{g_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ que verificam o conceito de **frame.** A vantagem da redundância é que a falta de um coeficiente $\langle g_i,\ f\rangle$ não afecta a reconstrução de f. Além disso, se excluirmos um elemento da família $\{g_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ continuamos a ter um **frame**, o que não acontece com as bases.

- **Procedimento clássico de armazenar informação duma função f dum espaço de Hilbert H num conjunto numerável de valores em $\ell^2(\mathbb{J})$**

$$\langle g_i\,,\ f\rangle = \int_{\mathbb{R}} g_i(x)\, f(x)\, dx \qquad \in \ell^2(\mathbb{J}) \tag{22}$$

- Para garantir que f é completamente caracterizada pelo conjunto dos $\langle g_i\,,f\rangle$ é necessário exigir que

$$\{\langle g_i\,,\ f\rangle = \langle g_i\,,h\rangle\}_{i\in\mathbb{J}} \Longrightarrow\ f = h\ \in \mathcal{H} \tag{23}$$

(i.e. as funções $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ geram um **conjunto denso** em $\mathcal{H}$).

- Exige−se também que a correspondência $\mathcal{T} : \mathcal{H} \mapsto \ell^2[\mathbb{J}]$

$$\mathcal{T}\, f = \left\{\langle g_i\,,\, f\rangle\right\}_{i\in\mathbb{J}} \tag{24}$$

defina um operador **limitado** i.e. existe $B < \infty$ tal que

$$\|\mathcal{T}\, f\|^2 \le B\,\|f\|^2 \tag{25}$$

- Para obter sempre uma **reconstrução** de $f \in \mathcal{H}$ do conjunto numerável $\left\{\langle g_i\,,\, f\rangle\right\}_{i\in\mathbb{J}} \in \ell^2(\mathbb{J})$ é necessário exigir também que para todo o $f \in \mathcal{H}$ exista uma constante $0 < A \le B$ tal que

$$A\,\|f\|^2 \le \|\mathcal{T}\, f\|^2 \tag{26}$$

- **Um frame designa um conjunto de vectores $\left\{g_j \in \mathrm{H}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$ que verifique estas condições:**

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_j \left|\langle g_j\,,\, f\rangle\right|^2 \le B\,\|f\|^2 \tag{27}$$

com $A, B > 0$ e $\frac{A}{B} \le 1$.

- Para um **tight frame** tem−se $A = B$ e é possível reconstruir f através de

$$f(x) = \frac{1}{A}\sum_i \langle g_i,\, f\rangle\, g_i(x) \tag{28}$$

- Os vectores dum **frame** não formam necessáriamente uma base porque, embora possam ser linearmente independentes (i.e. não podem ser expressos numa **combinação linear finita** de outros elementos do frame) podem eventualmente ser expressos numa **combinação linear infinita** dos restantes elementos do **frame**.

- Um **tight frame** com a razão $\frac{A}{B} = 1$ é óptima e o operador $\mathcal{T}$ é um múltiplo de uma isometria de $\mathcal{H}$ para $\ell^2(\mathbb{J})$ pelo que o seu inverso é um múltiplo do seu adjunto $\mathcal{T}^*$.

- Um **frame** é uma versão redundante de uma base, enquanto um **tight frame** é uma versão redundante de uma base ortogonal.

- Em dimensão finita um exemplo de frame é uma matriz com mais colunas que linhas e com linhas independentes. Um tight frame seria o caso em que a linhas são ortogonais.

- Em dimensão infinita um exemplo tight frame é a expansão sobre−amostrada de Shannon usando a função *sinc*.

Decomposição Polar

- **Qualquer matriz invertível $\mathbb{A}$ se pode escrever na forma do produto de uma matriz unitária $\mathbb{W}$ e uma matriz positiva−semidefinida Hermítica $\mathbb{P}$**

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{P} \tag{29}$$

- A matriz $\mathbb{P}$ é a raíz quadrada da matriz $\mathbb{A}^\dagger \mathbb{A} = \mathbb{P}^2$.

- A matriz unitária $\mathbb{W} = \mathbb{A}\mathbb{P}^{-1}$.

Diagonalização de Matriz Hermítica

- **Qualquer matriz Hermítica $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ é diagonalizável por uma transformação de semelhança através de uma matriz unitária $\mathbb{U}$ formada pelos seus vectores próprios. Os elementos da diagonal de $\mathbb{D}$ são os valores próprios μ_i de $\mathbb{A}$.**

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^\dagger \tag{30}$$

Decomposição singular

- **Para qualquer matriz $\mathbb{A}$ de dimensão $m \times n$ existe uma matriz $\mathbb{D}$ $m \times n$ pseudo−diagonal e um par de matrizes quadradas ortogonais $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ tais que**

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{V}^\dagger \tag{31}$$

- A matriz $\mathbb{D}$ tem zeros excepto na sua diagonal, onde $d_{11} = \sqrt{\mu_1} \geq d_{22} = \sqrt{\mu_2} \geq \ldots \geq d_{rr} = \sqrt{\mu_r} > 0$, sendo $r = rank(\mathbb{A})$ e μ_i os valores próprios de $\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger$.

- As colunas de $\mathbb{U}$ são formadas pelos vectores próprios de $\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger$, e as de $\mathbb{V}$ pelos vectores próprios de $\mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}$.

Pseudo−Inverso e Equações de Penrose

- **O pseudo−inverso (Moore−Penrose) de um operador $\mathbb{A}$ é um operador $\mathbb{A}^-$ que verifica**

- Equações de Penrose

$$
\begin{cases}
Eq.1 & \mathbb{A}\mathbb{A}^{-}\mathbb{A} = \mathbb{A} \\
Eq.2 & \mathbb{A}^{-}\mathbb{A}\mathbb{A}^{-} = \mathbb{A}^{-} \\
Eq.3 & (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-})^{\dagger} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-} \\
Eq.4 & (\mathbb{A}^{-}\mathbb{A})^{\dagger} = \mathbb{A}^{-}\mathbb{A}
\end{cases}
\tag{32}
$$

- O pseudo−inverso de uma matriz existe sempre e é único.

- Usando SVD o pseudo inverso pode−se escrever em termos do sistema singular de $\mathbb{A}$ definido por $\{\vec{\boldsymbol{u}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_i, \mu_i\}$

$$
\mathbb{A}^{\dagger}\mathbb{A}\,\vec{\boldsymbol{u}}_i = \mu_i\,\vec{\boldsymbol{u}}_i \quad ; \quad \mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}\,\vec{\boldsymbol{v}}_i = \mu_i\,\vec{\boldsymbol{v}}_i \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\mathbb{A}\,\vec{\boldsymbol{u}}_i \tag{33}
$$

$$
\mathbb{A}^{-} = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\vec{\boldsymbol{u}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{v}}^{\dagger} = \lim_{\eta\to 0_+}\left(\mathbb{A}^{\dagger}\mathbb{A} + \eta\mathbb{1}\right)^{-1}\mathbb{A}^{\dagger} = \lim_{\eta\to 0_+}\mathbb{A}^{\dagger}\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger} + \eta\mathbb{1}\right)^{-1} \tag{34}
$$

Representação de um sinal finito

- Num espaço vectorial de dimensão N um vector qualquer $\vec{\boldsymbol{f}}$ do subespaço gerado por uma família de vectores $\vec{\boldsymbol{g}}_i$, $i = 1, \ldots, M$ pode ser representado por

$$
\vec{\boldsymbol{f}} = \mathbb{A}.\vec{\boldsymbol{c}} = \sum_{i=1}^{M} c_i\,\vec{\boldsymbol{g}}_i \tag{35}
$$

- A $N \times M$ matriz $\mathbb{A}$ é formada por colunas $\vec{\boldsymbol{g}}_i$ e se $rank(\mathbb{A}) = N \leq M$ para todo o $\vec{\boldsymbol{f}}$ existe sempre um conjunto de M coeficientes c_i tais que $\mathbb{A}\,\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{f}}$.

- A matriz $\mathbb{A}$ verifica a condição

$$
rank(\mathbb{A}) = N \iff \left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{-1} existe \tag{36}
$$

- O conjunto de coeficientes que decompõem $\vec{\boldsymbol{f}}$ em termos dos $\vec{\boldsymbol{g}}_i$ é

$$
\vec{\boldsymbol{c}} = \mathbb{A}^{\dagger}\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{-1}\vec{\boldsymbol{f}} \tag{37}
$$

- A matriz $\mathbb{A}^{-} = \mathbb{A}^{\dagger}\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{-1}$ designa−se a **pseudo−inversa** de $\mathbb{A}$. As suas linhas formam M vectores $\vec{\boldsymbol{h}}_i$, $i = 1, \ldots, M$ tais que

$$
\vec{\boldsymbol{f}} = \mathbb{A}\,\vec{\boldsymbol{c}} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-}\,\vec{\boldsymbol{f}} = \sum_{i=1}^{M}\left\langle \vec{\boldsymbol{h}}_i, \vec{\boldsymbol{f}} \right\rangle \vec{\boldsymbol{g}}_i \tag{38}
$$

- E fácil de ver que a soma anterior também se pode escrever

$$\vec{f} = \mathbb{A}^{-} \mathbb{A} \, \vec{f} = \sum_{i=1}^{M} \left\langle \vec{g}_i, \vec{f} \right\rangle \vec{h}_i \tag{39}$$

- Os **valores singulares** da matriz $\mathbb{A}$ são $\sqrt{\mu_i}$, onde os $\mu_i > 0$ são os valores próprios da matriz positiva $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}$. A razão entre os valores máximo $B = max(\mu_i)$ e $A = min(\mu_i)$ determina a qualidade numérica do sistema algébrico. Em particular tem−se a desigualdade

$$A \, \|f\|^2 \leq \left\langle \mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger} \; \vec{f}, \vec{f} \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} \left| \left\langle \vec{g}_i, \vec{f} \right\rangle \right|^2 \leq B \, \|f\|^2 \tag{40}$$

- O conjunto dos $\vec{g}_i$ anteriores designa−se um **frame**, e se $A = B$ um **tight frame**. O operador $\mathbb{S} = \left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{-1/2}$ obtido a partir da decomposição singular de $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\dagger}$ e substituindo os seus valores singulares μ_i por $\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$, transforma um **frame** $\vec{g}_i$ num **tight frame** $\mathbb{S} \, \vec{g}_i$.