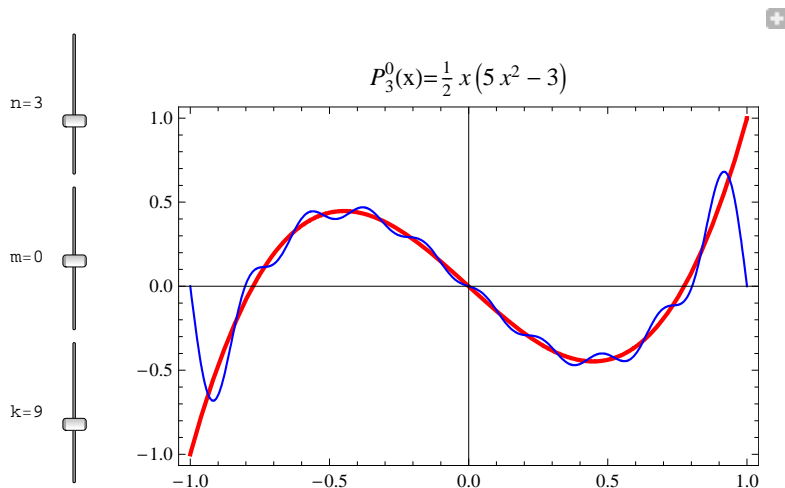


Introdução Histórica

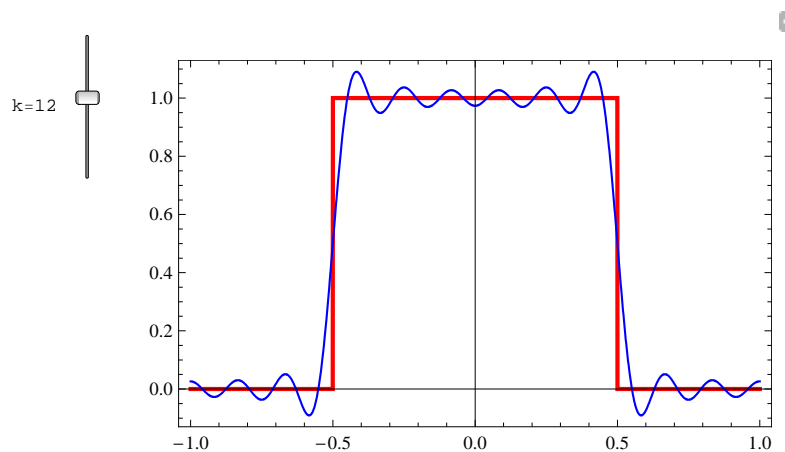
■ Bases de Fourier (1822)

Fourier, J., (1822): "Théorie Analytique du Chaleur"

- Antes de Fourier as funções eram decompostas em séries inteiras $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ e tinham propriedades muito especiais.
- Ao representar funções na forma $f(x) = a_0 + (a_1 \cos[x] + b_1 \sin[x]) + (a_2 \cos[2x] + b_2 \sin[2x]) + \dots$ Fourier definiu um novo universo de funções.
- Exemplos



Síntese de Funções de Legendre associadas $P_n^m(x)$ em série parcial de Fourier de ordem k no intervalo $[-1, 1]$.



Síntese da função rectangular $\text{rect}[-1/2, 1/2]$ em série parcial de Fourier de ordem k no intervalo $[-1, 1]$.

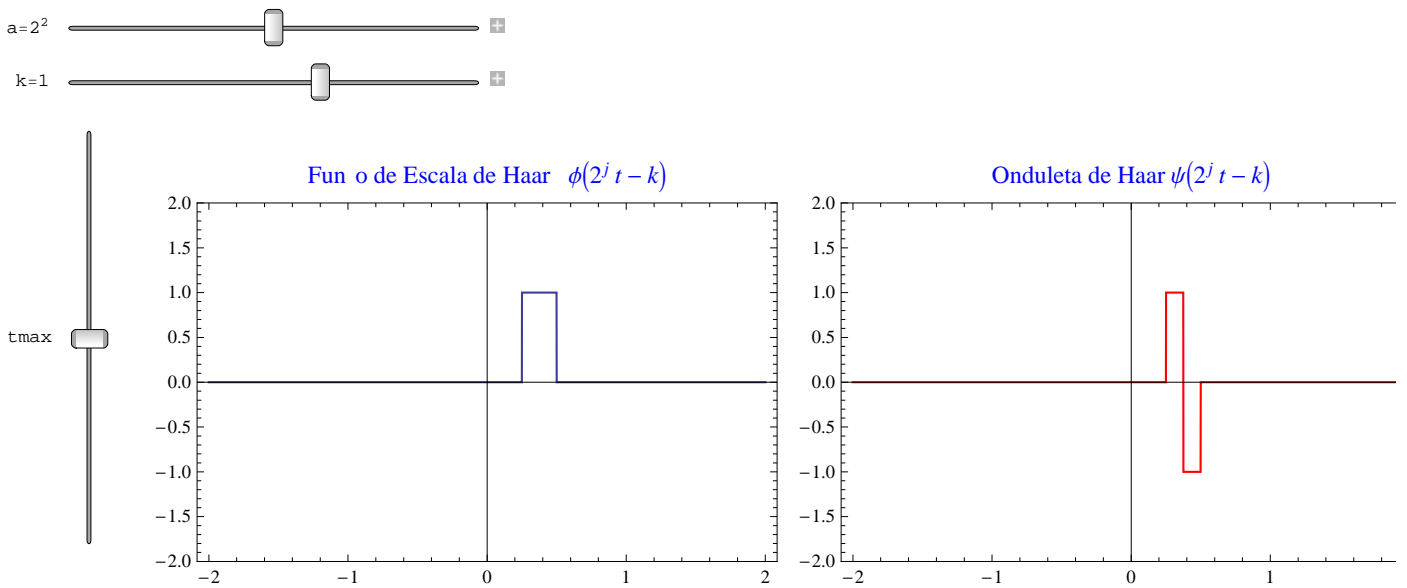
■ Bases de Haar (1910)

Haar, A., (1910), "Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Annalen* 69:331–371.

- Questão: existirá outro sistema ortonormal de funções no intervalo tal que qualquer função contínua $f(x)$ aí definida possa ser representada por uma série uniformemente convergente

$$a_0 h_0(x) + a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + \dots?$$

- o A resposta é positiva e existe um número infinito de soluções: onduletas!



As funções de Haar $h(x) = \psi(x)$, as respectivas onduletas $\psi_{jk}(x) = \psi(2^j x - k)$ e a função de escala associada $\phi(2^j - k)$.

■ Análise de Fourier não-harmónica (Walsh–Wiener) (1921)

Walsh, J. L., (1921) "A generalisation of the Fourier cosine series", *Trans. Amer. Math. Soc.* 22, pag.230–239.

- o **Frames** introduzidos pela primeira vez no contexto de séries de Fourier não-harmónicas onde as funções $g_j[x] \propto e^{i\lambda_n x}$ com $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- o Aplicações de NHFA são : processos de difusão, teoria do controlo, teoria de amostragem (Shannon).

■ Análise de Littlewood–Paley (1930)

Paley, Wiener, (1934) "Fourier transforms in the complex domain", *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, no. 19

- o Localização da Energia numa função: Divisão de espectro de Fourier por oitavos (Littlewood–Paley)
- o Para uma função periódica f o integral $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ é o valor médio da energia e pode ser calculado directamente a partir dos coeficientes de Fourier.
- o O valor de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$ para $2 < p < \infty$ será muito maior que o valor médio da energia se esta estiver concentrada na vizinhança de alguns pontos, mas será da mesma ordem de magnitude se estiver uniformemente distribuída. Contudo para $p \neq 2$ não é possível calcular ou estimar as normas $\|f\|_p$ a partir dos coeficientes de Fourier de $f(x)$.

- Para revelar esta informação a partir dos coeficientes de Fourier, Littlewood e Paley definem os Blocos Diádicos a partir da série de Fourier de $f(x)$

$$\Delta_j f(x) = \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} (a_k \cos[kx] + b_k \sin[kx]) \quad (1)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f(x) \quad (2)$$

- O resultado fundamental de Littlewood–Paley é que para cada p existem constantes $C_p \geq c_p > 0$ tais que

$$c_p \|f\|_p \leq \left\| \sqrt{|a_0|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad (3)$$

• Frames, e operadores de Calderón–Zygmund. (1934)

- Antoni Zygmund & al. (U.Chicago) introduziram o conceito de "onduleta-mãe" ao estender para \mathbb{R}^n os resultados de Littlewood–Paley.
- ψ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, rapidamente decrescente, com transformada de Fourier $\hat{\psi}$ que verifica, para $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$:

$$\begin{cases} \hat{\psi}(\vec{k}) = 1 & \text{se } 1 + \alpha \leq |\vec{k}| \leq 2(1 - \alpha) \\ \hat{\psi}(\vec{k}) = 0 & \text{se } |\vec{k}| \leq 1 - \alpha \text{ ou } |\vec{k}| \geq 2(1 + \alpha) \\ \hat{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j} \vec{k})|^2 = 1 & \forall \vec{k} \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

- A última condição é verificada no caso unidimensional por funções ψ tais que $\psi_{jk}(x) = 2^{-j} \psi(2^j x - k)$ formam uma base ortonormada.
- Em geral a última condição significa apenas que se deve ter $|\hat{\psi}(\vec{k})|^2 + |\hat{\psi}(2\vec{k})|^2 = 1$ para $1 - \alpha \leq |\vec{k}| \leq 1 + \alpha$, sendo automaticamente verificada para os restantes valores. Esta condição é semelhante à imposta a QMF e Malvar–Wilson Wavelets.
- Definindo $\psi_j(\vec{k}) = (2^n)^j \psi(2^j \vec{k})$ e substituindo os Blocos Diádicos de Littlewood–Paley pela convolução $\Delta_j f = f * \psi_j$, a função de Littlewood–Paley–Stein é

$$g(x) = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_j f(x)|^2} \quad (5)$$

- Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\|f\|_2 = \|g\|_2$ e se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existem constantes $C_p \geq c_p > 0$ tais que

$$c_p \|g\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p \|g\|_p. \quad (6)$$

- A sequência de operadores $\Delta_j : f \rightarrow f * \psi_j$ constitui um sistema de filtros passa-banda, com bandas de

frequência de um oitavo.

- Um oitavo é o intervalo de frequências $[f_1, f_2]$ tal que $\frac{f_1}{f_2} = 2$. Isto cobre o conjunto de oito notas Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do numa escala de música.
- Uma década é um intervalo de frequências tal que $\frac{f_2}{f_1} = 10$.

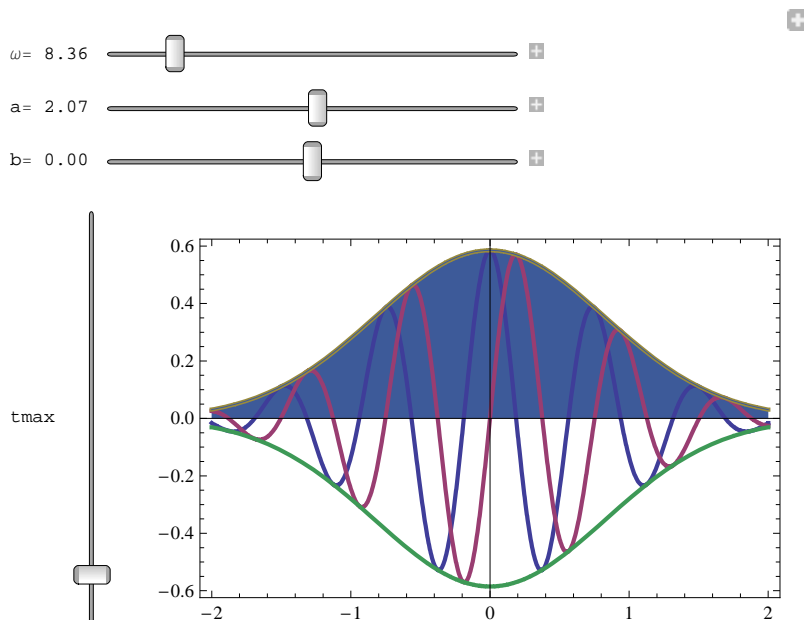
■ Funções de Gabor (1946)

Gabor, D., (1946), *J. IEE (London)*, Vol. 93, Part III, No. 26, Page 429–457

$$w_{ab}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{i\omega t}$$

(7)

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



Átomos de Gabor com	{	ω	Frequência Média
		a	Largura da Janela
		$b - a$	Princípio da Janela
		$b + a$	Fim da Janela

■ Processamento de sinais discretizados: Compressão de imagem e som: Codificação Sub-banda e Filtros em Quadratura (QMF) (1976)

A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand. (1976) "Perfect channel splitting by use of interpolation / decimation / tree decomposition techniques." *Int. Conf. on Inform. Sciences and Systems*, pages 443–446.

R. E. Crochiere, S. A. Webber, and J. L. Flanagan. (1976) "Digital coding of speech in sub-bands." *Bell System Technical Journal*, 55(8):1069–1085.

■ **Teorema de Balian–Low (1981)**

Balian, R., (1981), "Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique", C.R. Acad. Sci. Paris, 292, pp. 1357–1362

Springer Online

■ **Visão Computorizada, reconhecimento de movimento e de objectos: Algoritmo Piramidal (1983)**

Marr, D. (1982) "Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information." Freeman

P. J. Burt and E. H. Adelson. "The Laplacian pyramid as a compact image code." IEEE Trans. Commun., 31(4):532–540, April 1983.

- A importância do algoritmo piramidal não foi imediatamente reconhecida, e citando um dos referees do artigo original de Burt e Adelson: "I suspect that no one will ever use this algorithm again."
- Marvin Minsky no MIT não consegue implementar visão artificial para robots usando AI.
- David Marr (Conjectura): O processamento da informação luminosa pelas células da retina baseia-se no cruzamento de zeros da sua transformada de onduleta.
- Marr propõe-se estabelecer os fundamentos científicos da visão, rejeitando a posição dos neurofisiologistas de que existem células com funções visuais específicas (é absurdo procurar a célula que permite reconhecer a avó)
- Marr rejeita também a hipótese de alguns psicólogos que relacionam a eficácia da visão humana com o processo de aprendizagem com base em experiências que mostram que estereogramas artificiais induzem a percepção de estruturas tridimensionais com a mesma rapidez que objectos reais.
- Questões

{	Definir contornos de objectos a partir de variações de intensidade de luz
	Determinar a sensação de profundidade
	Definir a sensação de movimento
- A detecção de variações de intensidade requerem que se considere as variações a diferentes escalas. Por outro lado uma variação brusca implica um pico na primeira derivada, i.e. um zero na segunda derivada da imagem.

- O filtro que melhor representa estas condições é o Laplaciano de Gaussiana $G(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$
- Onduleta de Marr

$$\psi(r) = \nabla^2 G(r) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{r^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

- Para uma imagem com níveis de cinzento dada por $g(x, y)$, as linhas de cruzamento de zero são definidas pela equação $(f * \psi_\sigma)(x, y) = 0$, i.e. os zeros dos coeficientes de onduletas geradas por ψ .
- Os valores de σ foram determinados por experimentação neurofisiológica e seguem uma progressão geométrica $\sigma_j = (1.75)^j \sigma_0$.
- A Conjectura de Marr baseia-se na afirmação que a representação da imagem pelas soluções da equação $(f * \psi_\sigma)(x, y) = 0$ não acarreta perda de informação, o que é falso para imagens periódicas sem limites, mas não demonstrado falso para imagens finitas.

- Mallat (Conjectura)

■ Onduletas em Geofísica (1984)

P. Goupillaud, A. Grossman, and J. Morlet. "Cycle–octave and related transforms in seismic signal analysis. Geoexploration", 23:85–102, 1984/85. Elsevier Science Pub.

A. Grossmann and J. Morlet. "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape". SIAM Journ. of Math. Anal., 15(4):723–736, July 1984.

- imagem subterrânea em Geofísica, tomografia de infra – vermelhos para campos de temperatura poissonianos estacionários: A transformada contínua de Onduletas permite a detecção e caracterização de singularidades homogêneas porque as linhas de fase constante no semi – plano de parâmetros converge para o ponto na fronteira (ou além dela para o caso de campos potenciais) que localiza a singularidade.

■ Bancos de Filtros e Reconstrução Perfeita de Sinais (1984)

M. J. T. Smith and T. P. Barnwell III. "A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree structured sub-band coders". In Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc., San Diego, CA, March 1984.

F. Mintzer. "Filters for distortion–free two–band multirate filter banks." IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., 33(3):626–630, June 1985.

M. J. T. Smith and T. P. Barnwell III. "Exact reconstruction for tree–structured subband coders". IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., 34(3):431–441, June 1986.

M. Vetterli. "Filter banks allowing perfect reconstruction." Signal Proc., 10(3):219–244, April 1986.

P. P. Vaidyanathan. "Theory and design of M–channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having the perfect reconstruction property". IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., 35(4):476–492, April 1987.

■ Bases de Wilson–Malvar (1987):

Wilson, K. G., (1987), "Generalized Warnier functions." Preprint, Cornell University.

H. S. Malvar, (1986), "Optimal pre– and post–filtering in noisy sampled data systems." PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.

H. S. Malvar, (1992), "Extended lapped transforms: Properties, applications, and fast algorithms." IEEE Trans. Signal Proc., 40(11):2703–2714.

H. S. Malvar, (1992), "Signal Processing with Lapped Transforms." Artech House, Norwood, MA.

■ Onduletas Ortogonais de Suporte Compacto (1988)

G. Battle, (1987) A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions. Commun. Math. Phys., 110:601–615.

I. Daubechies, (1988), "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 41, Issue 7, Pages 909 – 996

G. Battle, (1988), "A block spin construction of ondelettes. Part II: the QFT connection." Commun. Math. Phys., 114:93–102.

P. G. Lemarié, (1988), "Ondelettes à localisation exponentielle." J. Math. pures et appl.,67:227–236.

■ Análise Multi–resolução Mallat e Meyer (1989)

S. Mallat. "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation." IEEE Trans. Patt. Recog. and Mach. Intell., 11(7):674–693, July 1989.

S. Mallat. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$." Trans. Amer. Math. Soc., 315:69–87, September 1989

Y. Meyer. "Ondelettes et Opérateurs". Hermann, Paris, 1990

■ **Onduletas Bi-Ortogonais, Pacotes de Onduletas, Bases otimais (1992)**

A Cohen, I Daubechies, J C Feauveau, (1992) "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets", *Communications on Pure and Applied Mathematics* 45

R Coifman, M Wickerhauser, (1992) "Entropy-based algorithms for best-basis selection", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp 713–718

■ **Wavelet Scalar Quantization (WSQ) Fingerprint FBI Standard (1993)**

Bradley, Brislawn, Hopper, "The FBI Wavelet/Scalar Quantization Standard for gray-scale fingerprint image compression", *SPIE Proceedings*, vol. 1961, *Visual Information Processing II*, Orlando, FL, pp. 293–304, Apr. 1993

■ **Multi-Onduletas (1994)**

V. Strela and G. Strang, "Finite element multiwavelets", in *Wavelet Applications in Signal and Image Processing II*, *SPIE Proceedings Volume 2303*, A. F. Laine and M. A. Unser, eds., Society of Photo-Optical Industrial Engineers, Bellingham, WA, 1994, pp. 202–213.

- Filtragem vectorial M-bandas.

■ **Onduletas em esferas (1995)**

Peter Schröder and Wim Sweldens, "Spherical wavelets: Efficiently representing functions on a sphere", *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 95)*, pp. 161–172, 1995

■ **O esquema de "lifting" de onduletas (1996)**

Sweldens, W. "The Lifting Scheme: A Construction Of Second Generation Wavelets", *Siam J. Math. Anal.*, Vol. 29, Nr. 2, pp 511–546, 1997

Sweldens, W., "The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 3, nr. 2, pp. 186–200, 1996

■ **A norma JPEG-2000 e Cohen-Daubechies-Feauveau wavelets (1999)**

Skodras, A., Christopoulos, C. e Ebrahimi, T. , "The JPEG 2000 still image compression standard", *Signal Processing Magazine, IEEE*, Vol. 18, Nr. 5, pp 36–58, Sep 2001

- Família de onduletas biortogonais desenvolvidas para a norma JPEG2000 geradas a partir de B-splines.

■ **A Transformada de Hilbert-Huang (1998-...)**

Huang, N. and others, (1998) "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis", *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454, 903–995