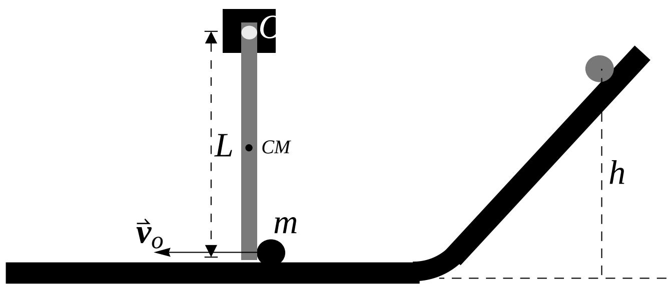
2º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Quar 15:30 - 16:30 Qa-02.3
26 de Maio 2010

1. Um pêndulo físico constituído por uma barra homogénea de massa M e comprimento L está em repouso na posição indicada na figura, podendo girar livremente em torno dum eixo horizontal passando pela sua extremidade em O. Uma esfera de massa m de pequenas dimensões rola sem atrito a partir de uma altura h, indo colidir com o pêndulo físico na outra extremidade.



1- a) (3 val.)
Assumindo uma colisão elástica entre a barra e a esfera determine as velocidades da barra e da massa depois da colisão. Justifique os cálculos indicando as leis de conservação que usa.

- A massa m cai de uma altura h sem atrito, donde a sua energia cinética antes da colisão provém toda da energia potencial gravítica inicial $U(h) = mgh$.

$$\frac{1}{2} m v_O{}^2 = m g h \quad \Longrightarrow \quad v_O = \sqrt{2 g h} \tag{1.1}$$

Na colisão com o pêndulo físico há conservação do momento angular relativo a O.

$$\vec{L}_O = m \vec{r}_m \times \vec{v}_o = \mathcal{I}_O \vec{\omega} + m \vec{r}_m \times \vec{v} \tag{1.2}$$

onde $\mathcal{I}_O \vec{\omega}$ é o momento angular da barra em relação ao ponto O depois da colisão. Uma vez que a colisão é elástica, há também conservação da energia cinética :

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \tag{1.3}$$

onde $\frac{1}{2} \mathcal{I}_O \omega^2 = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_{cm} \omega^2$ é a energia cinética do pêndulo físico, escrita em ter,os de rotação em torno do ponto O ou equivalentemente em termos de uma translacção do centro de massa composta com uma rotação em torno do centro de massa. Com estas duas equações é possível determinar $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$.

$$\begin{cases} m\,L(v_o - v) &= \mathcal{I}_O\,\omega \\ m\left(v_o^2 - v^2\right) &= \mathcal{I}_O\,\omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(v_o - v) &= \frac{\mathcal{I}_O}{L}\,\omega \\ m(v_o - v)\,(v_o + v) &= \mathcal{I}_O\,\omega^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

donde se conclui

$$\begin{cases} v_o - v &= \frac{\mathcal{I}_O}{m\,L}\,\omega \\ v_o + v &= L\,\omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\,v_o &= \frac{m\,L^2+\mathcal{I}_O}{m\,L}\,\omega \\ 2\,v &= \frac{m\,L^2-\mathcal{I}_O}{m\,L}\,\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega &= \frac{2\,m\,L}{m\,L^2+\mathcal{I}_O}\,v_o \\ v &= \frac{m\,L^2-\mathcal{I}_O}{m\,L^2+\mathcal{I}_O}\,v_o \end{cases} \tag{1.5}$$

O momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação passando por O é

$$\mathcal{I}_O = \int_0^L \frac{dM}{dx}\,x^2\,dx = \frac{M}{L}\,\frac{1}{3}\,L^3 = \frac{1}{3}\,M\,L^2 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \omega &= \frac{6\,m}{3\,m+M}\,\frac{v_o}{L} \\ v &= \frac{3\,m-M}{3\,m+M}\,v_o \end{cases} \tag{1.6}$$

1- b) (3 val.)
Determine uma expressão para o ângulo com a vertical θ_{max} que a barra atinge antes de voltar para trás.

O centro de massa da barra sobe uma altura z até que a energia potencial gravítica do seu centro de massa $U_b(z) = M\,g\,z$ seja igual à energia cinética inicial $E_c = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_O\,\omega^2$. Sabendo z determina-se $\theta_{max} = ArcCos\left[\frac{L-2\,z}{L}\right]$. Usando o valor de $v_o = \sqrt{2\,g\,h}$ obtém-se

$$M\,g\,z = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_O\,\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{I}_O\,\omega^2}{M\,g} = \frac{12\,m^2\,h}{(3\,m + M)^2} \tag{1.7}$$

1- c) (2 val.)
Determine qual a razão entre as massas m e M necessária para que a barra consiga dar uma volta completa em torno do ponto O.

Para $z = L$ temos $\theta_{max} = ArcCos[-1] = \pi$ que é suficiente para o pêndulo subir e parar na vertical acima de O. Assim, se o pêndulo passar essa posição é porque chega lá com alguma energia cinética, i.e.

$$M\,g\,L + \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_O\,\omega'^2 = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_O\,\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad L \le \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{I}_O\,\omega^2}{M\,g} = \frac{12\,m^2\,h}{(3\,m + M)^2} \tag{1.8}$$

$$L \le \frac{12\;h}{\left(3 + \frac{M}{m}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{m} \le \sqrt{\frac{12\,h}{L}} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{M} \ge \frac{1}{\sqrt{\frac{12\,h}{L}} - 3} \tag{1.9}$$

Em qualquer caso, se $h \le \frac{9}{12}\,L$ o pêndulo não consegue dar a volta.

1- d) (2 val.)
Se em vez de uma esfera tivéssemos um cilindro de raio R com a mesma massa m que roda sem escorregar a partir da altura h, qual seria a velocidade v_o com que chegaria à barra? (O momento de inércia do cilindro é $\mathcal{I}_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$)

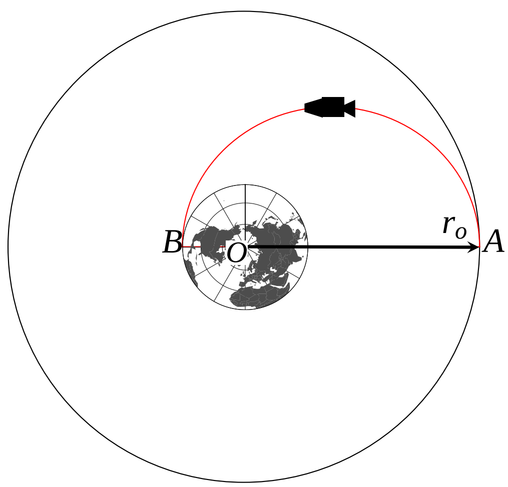
O centro de massa do cilindro continua a cair uma altura h, e uma vez que não há escorregamento, não há dissipação de energia. Toda a energia potencial gravítica é convertida em energia cinética, excepto que uma parte é energia de translacção do centro de massa e outra parte vai para a energia de rotação em torno do centro de massa com velocidade angular ω. Assim

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_o^2 + \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_{cm}\,\omega^2 \qquad (1.10)$$

Em rotação sem escorregamento existe a relação $v_o = \omega\,R$ pelo que

$$v_o^2 = \frac{2\,g\,h}{1 + \frac{\mathcal{I}_{cm}}{m\,R^2}} = \frac{4\,g\,h}{3} \quad \Longrightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{4}{3}\,g\,h} \qquad (1.11)$$

2. Uma nave espacial de massa m descreve uma órbita circular de raio r_o em redor da Terra. Designando por M_T e R_T respectivamente a massa e o raio da Terra, pretende-se efectuar a manobra de regresso à Terra usando uma órbita de transferência elíptica entre os pontos A e B.



2- a) (3 val.)
Mostre que a velocidade em A e B é perpendicular ao raio da órbita nesses pontos. Deduza que para uma órbita elíptica de semi-eixos a e b o momento angular verifica $L_o^2 = \frac{GM\,m^2\,b^2}{a}$. Use-o com a lei das áreas $\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{1}{2\,m}\vec{\boldsymbol{L}}_o$ para deduzir a 3ª Lei de Kepler $T^2 = C\,a^3$ e determine a constante C.

- (Sugestão: use a igualdade da energia mecânica total no apogeu (r_{max}) e perigeu (r_{min}) e a relação particular entre a velocidade v e L_o nesses pontos.)
- NB: A área de uma elipse de semi-eixos a e b é $\mathcal{A} = \pi\,a\,b$, onde $a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min})$ e $b = \sqrt{r_{max}\,r_{min}}$.

No apogeu e no perigeu as velocidades são ortogonais ao eixo da elipse porque para os extremos de r deve ter-se

$$0 = \frac{d r^2}{d t} = \frac{d(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})}{d t} = 2\,\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d t} = 2\,\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{2.12}$$

Assim o momento angular verifica

$$L_o = m\, v_A\, r_{max} = m\, v_B\, r_{min} \implies \begin{cases} v_A &= \dfrac{L_o}{m\, r_{max}} \\ v_B &= \dfrac{L_o}{m\, r_{min}} \end{cases} \tag{2.13}$$

Da conservação da energia mecânica total deduz-se que

$$\frac{1}{2} m\, v_A^2 - \frac{G\, M\, m}{r_{max}} = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{G\, M\, m}{r_{min}} \implies \frac{L_o^2}{2\, m}\left(\frac{1}{r_{max}^2} - \frac{1}{r_{min}^2}\right) = G\, M\, m\left(\frac{1}{r_{max}} - \frac{1}{r_{min}}\right)$$

$$L_o^2 = 2\, G\, M\, m^2\left(\frac{r_{max}\, r_{min}}{r_{max} + r_{min}}\right) = G\, M\, m^2\, \frac{b^2}{a} \tag{2.14}$$

Quanto à lei das áreas, integrando para uma volta inteira (ou seja um período T)

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{d t} = \frac{1}{2}\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2\, m}\,\vec{\boldsymbol{L}}_o \implies \int_0^T \frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{d t}\, d t = \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{T}{2\, m}\,\vec{\boldsymbol{L}}_o \tag{2.15}$$

Obtém-se daqui T, cujo quadrado, depois de substituído L_o^2, verifica

$$T = \frac{2\, m}{L_o}\,\pi\, a\, b \implies T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\, M}\, a^3 \tag{2.16}$$

2- b) (3 val.)
Determine a diferença de energia Mecânica entre as duas órbitas indicadas e a velocidade inicial e final da cápsula no ponto A ao preparar a manobra.

A energia mecânica de uma órbita elíptica de semi-eixo maior a é $E = E_C + U = -\frac{G\, M\, m}{2\, a}$. Assim na passagem da órbita circular de raio r_o para a órbita elíptica de semi-eixo $a = \frac{r_o + R_T}{2}$ é necessário em A uma energia

$$\Delta\text{E} = -\frac{G\, M\, m}{r_o + R_T} + \frac{G\, M\, m}{2\, r_o} = -G\, m\, M\, \frac{(r_o - R_T)}{2\, r_o\,(r_o + R_T)} \tag{2.17}$$

Numa órbita circular de raio r_o temos $a = b = r_o$ pelo que a velocidade é em A

$$v_o(A) = \frac{L_o}{m\, r_o} = \sqrt{\frac{G\, M}{r_o}} \tag{2.18}$$

Na órbita elíptica temos $a = \frac{r_o + R_T}{2}$, $b^2 = r_o\, R_T$ e a velocidade no mesmo ponto A deve ser

$$v_a(A) = \frac{L_o}{m\,a} = \sqrt{\frac{8\,G\;M\,r_o\,R_T}{(r_o + R_T)^3}} = \sqrt{\frac{G\,M}{r_o}}\;\sqrt{\frac{8\,\xi}{(1+\xi)^3}} \quad com\,\xi = \frac{R_T}{r_o} \ll \frac{1}{8} \tag{2.19}$$

2- c) (2 val.)
Qual é a energia que a nave precisa dissipar para aterrar na superfície da Terra?

À superfície da Terra a energia potencial é $U(R_T) = -\frac{G\,M\,m}{R_T}$, e se a nave aterrou esta é também a sua energia total E_T (desprezando a energia cinética devida à rotação diurna da Terra). Por outro lado a energia total na órbita elíptica é $E_a = -\frac{G\,M\,m}{r_o+R_T}$ pelo que

$$E_T - E_a = -\frac{G\,M\,m}{R_T} + \frac{G\,M\,m}{r_o + R_T} = -\frac{G\,M\,m\,r_o}{R_T\,(r_o + R_T)} \tag{2.20}$$

2- d) (2 val.)
Determine uma expressão para o tempo que leva a manobra de regresso de A a B. Justifique a sua resposta.

Para a transferência apenas é necessário percorrer metade da órbita elíptica de semi-eixo $a = \frac{r_o+R_T}{2}$, pelo que

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\left(\frac{r_o + R_T}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{\sqrt{8\,G\,M}}\,(r_o + R_T)^{3/2} \tag{2.21}$$