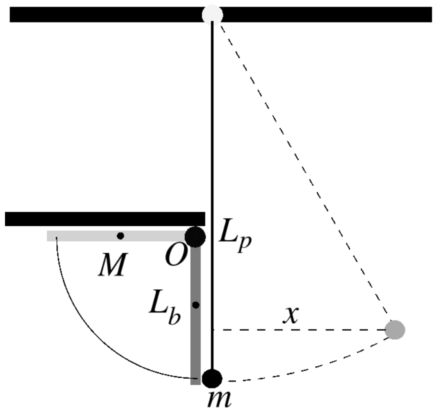
2º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Ter 12:30 - 13:30 Ga-5
25 de Maio 2010

1. Um pêndulo físico constituído por uma barra homogénea de massa M e comprimento L_b é largado do repouso na posição indicada na figura, indo colidir com a massa m do pêndulo simples após girar em torno do eixo em O. Designando por L_p o comprimento do fio que prende a massa m determine:



1- a) (2 val.)
O momento de inércia da barra $\mathcal{I}_O$ em relação ao eixo de rotação em O, a energia cinética E_{c_b} e o momento angular da barra $\vec{L}_O$ quando chega à massa m.

Por definição de momento de inércia

$$\mathcal{I}_O = \int_0^{L_b} \frac{dM}{dx} x^2 \, dx = \frac{M}{L_b} \frac{1}{3} L_b^3$$
$$\mathcal{I}_O = \frac{1}{3} M L_b^2 \tag{1.1}$$

Por conservação da energia mecânica, a variação de energia potencial do centro de massa que decai $\Delta h_{cm} = -\frac{L_b}{2}$ converte-se em energia cinética de translação+rotação $\mathcal{E}_c \equiv \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_{cm} \omega_o^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \omega_o^2$:

$$\mathcal{E}_c = -Mg \Delta h_{cm} = M g \frac{L_b}{2}$$
$$M g \frac{L_b}{2} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_O \omega_o^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{M g L_b}{\mathcal{I}_O}} = \sqrt{\frac{3 g}{L_b}} \tag{1.2}$$

$$\vec{L}_O = \mathcal{I}_O \vec{\omega}_o = \sqrt{M g L_b \mathcal{I}_O} \, \vec{e}_z = \sqrt{\frac{g}{3}} \, M L_b^{3/2} \vec{e}_z \tag{1.3}$$

1- b) (2 val.)
Assumindo uma colisão elástica entre a barra e a massa *m* determine as velocidades da barra e da massa à saída da colisão. Justifique os cálculos indicando as leis de conservação que usa.

- **Conservação do Momento Angular na Colisão**

$$\mathcal{I}_O\, \omega_o = \mathcal{I}_O\, \omega_1 + m\, v_1\, L_b \tag{1.4}$$

- **Conservação da Energia Cinética na Colisão**

$$\frac{1}{2}\, \mathcal{I}_O\, \omega_o^2 = \frac{1}{2}\, \mathcal{I}_O\, \omega_1^2 + \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 \tag{1.5}$$

- **Cálculo das velocidades de saída**

Passando todos os termos relativos à barra para o lado esquerdo em ambas as equações e simplificando:

$$\begin{cases} \mathcal{I}_O\,(\omega_o - \omega_1) = m\, v_1\, L_b & \Rightarrow\ \omega_o - \omega_1 = \dfrac{m\, L_b}{\mathcal{I}_O}\, v_1 \\ \mathcal{I}_O(\omega_o - \omega_1)\,(\omega_o + \omega_1) = m\, v_1^2 & \Rightarrow\ \omega_o + \omega_1 = \dfrac{1}{L_b}\, v_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Somando e subtraindo ambos os lados destas equações:

$$\begin{cases} 2\, \omega_o = \left(\dfrac{m\, L_b}{\mathcal{I}_O} + \dfrac{1}{L_b}\right) v_1 & \Rightarrow\ v_1 = \dfrac{2\, \mathcal{I}_O\, L_b}{\mathcal{I}_O + m\, L_b^2}\, \omega_o \\ 2\, \omega_1 = \left(\dfrac{1}{L_b} - \dfrac{m\, L_b}{\mathcal{I}_O}\right) v_1 & \Rightarrow\ \omega_1 = \dfrac{\mathcal{I}_O - m\, L_b^2}{\mathcal{I}_O + m\, L_b^2}\, \omega_o \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{2\, M}{M + 3\, m}\, L_b\, \omega_o & \textit{para o pêndulo} \\ \omega_1 = \dfrac{(M - 3\, m)}{(M + 3\, m)}\, \omega_o & \textit{para a barra} \end{cases} \tag{1.8}$$

1- c) (2 val.)
Determine a distância *x* a que a massa *m* chega da sua vertical inicial.

- **Conservação de energia mecânica no pêndulo**

Designando por *h* a altura a que o pêndulo sobe

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 = m\, g\, h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{1}{2\, g}\, v_1^2 \tag{1.9}$$

$$\left(L_p - h\right)^2 + x^2 = L_p^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{L_p^2 - \left(L_p - h\right)^2}$$

$$x = v_1 \sqrt{\frac{L_p}{g}\left(1 - \frac{v_1^2}{4\, g\, L_p}\right)} \tag{1.10}$$

1- d) (2 val.)
Assumindo agora que a colisão é completamente inelástica, determine a velocidade do conjunto barra+massa à saída da colisão.

■ Conservação do Momento Angular na Colisão

Agora $v_1 = L_b\, \omega_1'$ pelo que a conservação do momento angular é

$$\mathcal{I}_O\, \omega_o = \mathcal{I}_O\, \omega_1' + m\, L_b^2\; \omega_1' \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_1' = \frac{\mathcal{I}_O}{\mathcal{I}_O + m\, L_b^2}\, \omega_o = \frac{M}{M + 3\, m}\, \omega_o \tag{1.11}$$

1- e) (2 val.)
Determine a posição do centro de massa do conjunto barra+massa e o novo momento de inércia em relação a *O*. Determine neste caso o ângulo máximo que o pêndulo físico+massa consegue fazer com a vertical depois da colisão se $M = 2\, m$.

$$\left|\vec{\mathbf{r}}_{cm}' - \vec{\mathbf{r}}_O\right| = d_{cm}' = \frac{M\, \frac{L_b}{2} + m\, L_b}{(M + m)} = \frac{(M + 2\, m)}{(M + m)}\, \frac{L_b}{2} \tag{1.12}$$

$$\mathcal{I}_O' = \mathcal{I}_O + m\, L_b^2 = \frac{1}{3}\, (M + 3\, m)\, L_b^2 \tag{1.13}$$

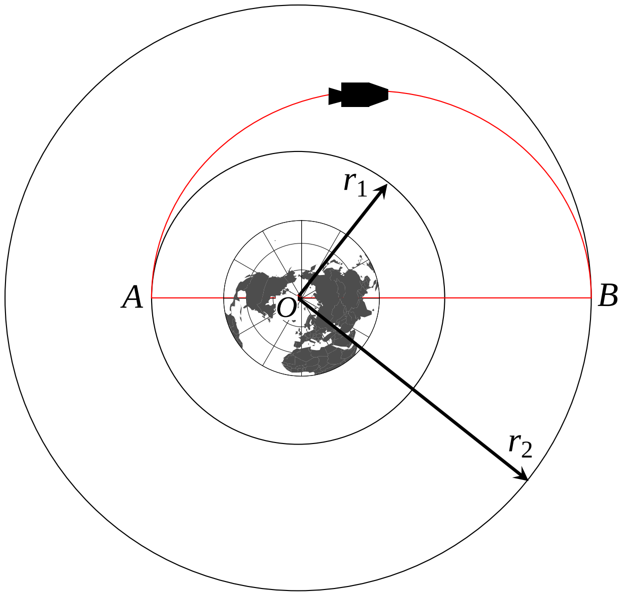
■ Conservação da Energia Mecânica

Para $M = 2\, m$, a conservação de energia mecânica total da barra+massa significa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, \mathcal{I}_O'\, \omega_1'^2 - m\, g\, d_{cm}' = -m\, g\, d_{cm}'\, Cos[\theta_{max}] \tag{1.14}$$

$$Cos[\theta_{max}] = 1 - \frac{1}{2}\, \frac{\mathcal{I}_O'\, \omega_1'^2}{m\, g\, d_{cm}'} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{max} = ArcCos\left[\frac{2}{5}\right] \tag{1.15}$$

2. Uma nave espacial de massa m descreve uma órbita circular de raio r_1 em redor da Terra de massa M.



2- a) (2 val.)
Mostre que a energia $E_{1,2}$ necessária para que a nave espacial passe da órbita de raio r_1 para uma outra órbita circular de raio r_2 é $E_{1,2} = \frac{GMm(r_2-r_1)}{2\,r_1\,r_2}$.

A energia mecânica de uma órbita circular de raio R é $E = E_C + E_P = -\frac{G\,M\,m}{2\,R}$. Assim

$$E_{1,2} = -\frac{G\,M\,m}{2\,r_2} + \frac{G\,M\,m}{2\,r_1} = \frac{G\,M\,m\,(r_2 - r_1)}{2\,r_1\,r_2} \tag{2.16}$$

2- b) (4 val.)
Se a transferência de uma órbita para a outra fôr efectuada por intermédio de uma órbita semi-elíptica, determine que percentagens desta energia $E_{1,2}$ é necessário fornecer à nave respectivamente no perigeu A e no apogeu B, como indicado na figura.

A energia mecânica de uma órbita elíptica de semi-eixo maior a é $E = E_C + E_P = -\frac{G\,M\,m}{2\,a}$. Assim na passagem da órbita circular de raio r_1 para a órbita elíptica de semi-eixo $a = \frac{r_1+r_2}{2}$ é necessário em A uma energia

$$E_A = -\frac{G\,M\,m}{2\,a} + \frac{G\,M\,m}{2\,r_1} = G\,M\,m\left(\frac{1}{2\,r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right) = \frac{G\,M\,m\,(r_2 - r_1)}{2\,r_1(r_1 + r_2)} \tag{2.17}$$

enquanto em B é necessário

$$E_B = -\frac{G\,M\,m}{2\,r_2} + \frac{G\,M\,m}{2\,a} = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2\,r_2}\right) = \frac{G\,M\,m\,(r_2 - r_1)}{2\,r_2(r_1 + r_2)} \tag{2.18}$$

Assim as percentagens de $E_{1,2}$ são

$$\frac{E_A}{E_{1,2}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad ; \quad \frac{E_B}{E_{1,2}} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \tag{2.19}$$

2- c) (2 val.)
Mostre que para uma órbita elíptica de semi-eixos a e b o momento angular verifica
$L_o^2 = \frac{G\,M\,m^2\,b^2}{a}$ e use-o para exprimir a lei das áreas em termos de a e b.

- (Sugestão: use a igualdade da energia mecânica total no apogeu (r_{max}) e perigeu (r_{min}) e a relação particular entre a velocidade v e L_o nesses pontos.)
- NB: A área de uma elipse de semi-eixos a e b é $\mathcal{A} = \pi ab$, onde $a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min})$ e $b = \sqrt{r_{max}\, r_{min}}$.

No apogeu e no perigeu as velocidades são ortogonais ao eixo da elipse. Assim o momento angular verifica

$$L_o = m\,v_A\,r_1 = m\,v_B\,r_2 \implies \begin{cases} v_A = \dfrac{L_o}{m\,r_1} \\ v_B = \dfrac{L_o}{m\,r_2} \end{cases} \tag{2.20}$$

Da conservação da energia mecânica total deduz-se que

$$\frac{1}{2}\,m\,v_A^2 - \frac{G\,M\,m}{r_1} = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{G\,M\,m}{r_2} \implies \frac{L_o^2}{2\,m}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$
$$L_o^2 = 2\,G\,M\,m^2\left(\frac{r_1\,r_2}{r_1 + r_2}\right) = G\,M\,m^2\,\frac{b^2}{a} \tag{2.21}$$

Quanto à lei das áreas, integrando para uma volta inteira (ou seja um período T)

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2\,m}\,\vec{\boldsymbol{L}}_o \implies \int_0^T \frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}\,dt = \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{T}{2\,m}\,\vec{\boldsymbol{L}}_o \tag{2.22}$$

Obtém-se daqui T, cujo quadrado, depois de substituído L_o^2, verifica

$$T = \frac{2\,m}{L_o}\,\pi\,a\,b \implies T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{2.23}$$

2- d) (2 val.)
Determine o tempo que leva esta transferência de órbita em função de r_1 e r_2. Justifique a sua resposta.

- (Sugestão: Deduza a 3ª Lei de Kepler a partir da lei das áreas da alínea anterior.)

Para a transferência apenas é necessário percorrer metade da órbita elíptica de semi-eixo $a = \frac{r_1+r_2}{2}$, pelo que

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3} = \frac{\pi}{2\,\sqrt{2\,G\,M}}\,(r_1 + r_2)^{3/2} \tag{2.24}$$