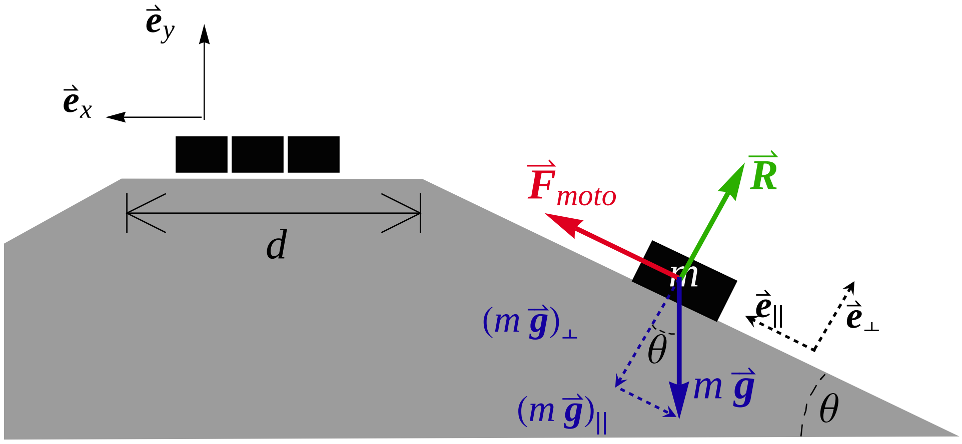
1º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

12 - 16 de Abril 2010

(Teste a)

1. Um piloto de acrobacia pretende saltar sobre uma fila de carros, estacionados de forma a ocupar um espaço d. A sua moto de massa m consegue ir dos 0 aos 100 $\frac{Km}{h}$ em T segundos. O piloto pretende chegar ao princípio da rampa com velocidade v_o e acelerar o suficiente em cima desta para realizar a acrobacia com sucesso. Sabendo que a inclinação da rampa é θ e que o coeficiente de atrito dinâmico na rampa é μ_d:



1- a) (2 val.)
Determine a aceleração máxima que a moto consegue dar sobre a rampa, assumindo que as rodas não derrapam (i.e. não há atrito dinâmico durante a aceleração).

A aceleração máxima da moto numa superfície horizontal é

$$\langle a_m \rangle = \frac{\Delta v}{T} = \frac{1}{3.6}\,\frac{100}{T}\,\frac{m}{s^2} \tag{1.1}$$

Assumindo que esta aceleração é devida a uma força $\vec{F}_{moto} = m\,\langle a_m \rangle$ actuando sobre a moto, o diagrama de forças indica a situação verificada sobre a rampa. As equações de movimento são assim:

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{F}_{moto} + \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\,a_{max} = -m\,g\,Sin[\theta] + m\,\langle a_m \rangle \\ 0 = -m\,g\,Cos[\theta] + R \end{cases} \tag{1.2}$$

A aceleração máxima da moto na rampa é assim

$$a_{max} = \langle a_m \rangle - g\,Sin[\theta] \tag{1.3}$$

(4 val.)
Calcule a velocidade mínima v_{min} necessária à saída da rampa para conseguir passar os carros.

Saindo da rampa com velocidade v_{min} o movimento que se segue é o da queda de um grave apenas sujeito à aceleração $\vec{\boldsymbol{g}}$. As equações da trajectória são assim no referencial $\{\vec{\boldsymbol{e}}_x, \vec{\boldsymbol{e}}_y\}$ indicado

$$\begin{cases} x(t) - x_o = v_{min}\, Cos[\theta]\, t \\ y(t) - y_o = v_{min}\, Sin[\theta]\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

Quando y volta ao y_o do inicio do salto ao fim do tempo de salto t_s queremos obter $d = x(t_s) - x_o$

$$\begin{cases} 0 = \left(v_{min}\, Sin[\theta] - \frac{1}{2}\, g\, t_s\right) t_s \quad \Longrightarrow \quad t_s = \frac{2}{g}\, v_{min}\, Sin[\theta] \\ d = v_{min}\, Cos[\theta]\, t_s \quad \Longrightarrow \quad d = v_{min}\, Cos[\theta]\, \frac{2}{g}\, v_{min}\, Sin[\theta] = \frac{1}{g}\, v_{min}^2\, Sin[2\,\theta] \end{cases} \tag{1.5}$$

Obtemos assim o valor requerido da velocidade

$$v_{min} = \sqrt{\frac{g\, d}{Sin[2\,\theta]}} \tag{1.6}$$

1- c) (2 val.)
Qual é a distância mínima L do fim da rampa para abortar em segurança a acrobacia, assumindo que o piloto já tinha começado a manobra? (NB. Ao travar já há derrapagem das rodas sobre a rampa.)

Ao travar a força de atrito $\vec{\boldsymbol{F}}_a = -\mu_d\, |\vec{\boldsymbol{N}}|\, \vec{\boldsymbol{e}}_{||} = -\mu_d\, m\, g\, Cos[\theta]\, \vec{\boldsymbol{e}}_{||}$ é uma componente da reacção da rampa $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{F}}_a$.

$$m\, \vec{\boldsymbol{a}} = m\, \vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{R}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\, a_{tr} = -m\, g\, Sin[\theta] - F_a \quad \Rightarrow \quad a_{tr} = -g\left(Sin[\theta] + \mu_d\, Cos[\theta]\right) \\ 0 = m\, g\, Cos[\theta] + N \quad \Rightarrow \quad N = m\, g\, Cos[\theta] \end{cases} \tag{1.7}$$

Se começar a travar quando já tem uma velocidade v_i, necessita de parar antes de chegar ao fim da rampa. Da equação das velocidades com aceleração uniforme a obtém-se que para parar sobre a rampa é necessário um tempo t_{seg}

$$0 = v_i + a_{tr}\, t_{seg} \quad \Rightarrow \quad t_{seg} = -\frac{v_i}{a_{tr}} \qquad \left(\text{explícitamente } \; t_{seg} = \frac{v_i}{g\left(Sin[\theta] + \mu_d\, Cos[\theta]\right)}\right) \tag{1.8}$$

O espaço percorrido na rampa em travagem é então

$$L = v_i\, t_{seg} + \frac{1}{2}\, a_{tr}\, t_{seg}^2 \quad \Rightarrow \quad L = -\frac{1}{2}\, \frac{v_i^2}{a_{tr}} \qquad \left(\text{explícitamente } \; L = \frac{1}{2}\, \frac{v_i^2}{g\left(Sin[\theta] + \mu_d\, Cos[\theta]\right)}\right) \tag{1.9}$$

Para atingir a velocidade mínima v_{min} sobre a rampa com aceleração a_{max} é necessária a distância L quando se parte com velocidade v_i tal que (teorema Trabalho-Energia)

$$\frac{1}{2}\, m\left(v_{min}^2 - v_i^2\right) = m\, a_{max}\, L \quad \Longrightarrow \quad v_i^2 = v_{min}^2 - 2\, L\, a_{max} \tag{1.10}$$

Substituindo na expressão calculada para $L = -\frac{1}{2}\, \frac{v_i^2}{a_{tr}}$

$$L = -\frac{1}{2}\,\frac{v_{min}^2 - 2\,L\,a_{max}}{a_{tr}} \implies L = \frac{v_{min}^2}{2\,(a_{max} - a_{tr})} = \frac{v_{min}^2}{2\left(\langle a_m\rangle + \mu_d\,g\,Cos[\theta]\right)} \tag{1.11}$$

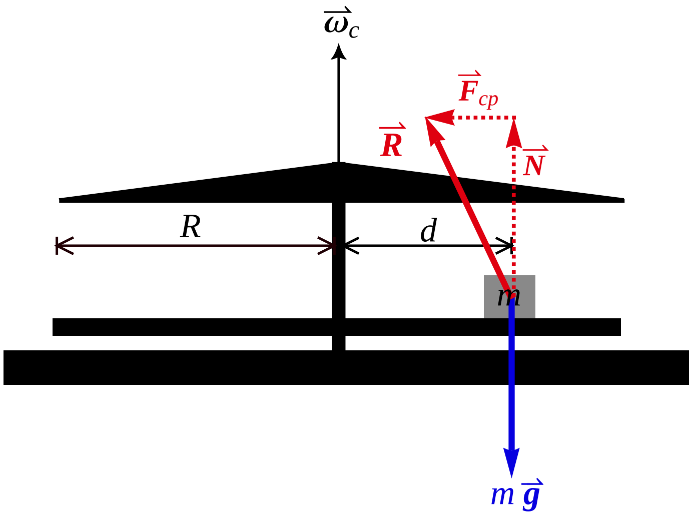
1- d) (2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo de travagem e o trabalho total.

$$\begin{aligned} W_R &= \int_L \vec{\boldsymbol{F}}_a \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -\mu_d\,m\,g\,Cos[\theta]\,L \\ W_g &= \int_L m\,\vec{\boldsymbol{g}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -m\,g\,Sin[\theta]\,L \\ W_{tot} &= -m\,g\left(Sin[\theta] + \mu_d\,Cos[\theta]\right) L \equiv m\,a_{tr}\,L \end{aligned} \tag{1.12}$$

---

2. Um indivíduo de massa m está à distância d do centro de um carrosel de raio R, que roda com velocidade angular ω_c. Se o indivíduo se mantiver em pé perto do mesmo cavalo sobre o carrossel:

2- a) (1 val.)
Faça um diagrama das forças que actuam sobre o indivíduo.



$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{F}}_g = m\,\vec{\boldsymbol{g}} \\ \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{cp} \quad onde \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{N}} = -m\,\vec{\boldsymbol{g}} & componente\ normal\ da\ reacção \\ \vec{\boldsymbol{F}}_{cp} = -m\,d\,\omega_c^2\,\vec{\boldsymbol{e}}_r & força\ centrípeta \end{cases} \end{cases}$$

2- b) (2 val.)
Qual deve ser a força com que se deve agarrar ao cavalo para não cair.

- Para um indivíduo que estivesse montado no cavalo e pés no ar a força necessária seria igual à força centrípeta que garante o seu movimento circular de raio d e velocidade angular ω_c.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{cp} = -m\,d\,\omega_c^2\,\vec{\boldsymbol{e}}_r \tag{2.13}$$

Para um indivíduo em pé na vertical apenas parte desta força tem de ser aplicada pelos braços, porque dependendo do tipo de calçado e condições do chão existe uma força de atrito estático actuando na direcção radial $-\vec{\boldsymbol{e}}_r$ e de magnitude $\left|F_{a_e}\right| \leq \mu_e\,mg$ que fornece parte desta força centrípeta total $\vec{\boldsymbol{F}}_{cp}$.

(3 val.)
Qual deve ser a inclinação que deve manter em relação à vertical se quiser ficar no mesmo sítio largando o cavalo (assuma que os pés não escorregam).

- A direcção "vertical aparente" é localmente definida pela aceleração relativa

$$\vec{\boldsymbol{g}}' = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}}_{cp} = \vec{\boldsymbol{g}} + d\,\omega_c^2\,\vec{\boldsymbol{e}}_r \tag{2.14}$$

Assim o ângulo com a vertical de $\vec{\boldsymbol{g}}$ é definido por

$$Cos[\theta] = \frac{\vec{\boldsymbol{g}}' \cdot \vec{\boldsymbol{g}}}{|\vec{\boldsymbol{g}}'|\,|\vec{\boldsymbol{g}}|} \quad \Rightarrow \quad \theta = ArcCos\left[\frac{g}{\sqrt{g^2 + d^2\,\omega_c^4}}\right] \tag{2.15}$$

O individuo deve assim ficar inclinado para o eixo do carrossel fazendo um ângulo θ com a vertical.

2- d) (4 val.)
Qual é o ângulo (com a direcção radial que passa na sua posição) com que deve atirar um objecto para ser apanhado por um espectador na periferia do carrossel, sabendo apenas que no instante em que o faz o espectador, o indivíduo e o centro do carrossel estão alinhados (por esta ordem).

Para um objecto atirado com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_o$ no carrossel descrever uma trajectória no plano vertical $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_z\}$ que passa pelo indivíduo e o espectador no instante do lançamento é necessário que a soma vectorial de $\vec{\boldsymbol{v}}_o$ e a velocidade $d\,\omega_c\,\vec{\boldsymbol{e}}_\theta$ do carrossel no local em que o indivíduo faz o lançamento seja

$$\vec{\boldsymbol{v}}_o + d\,\omega_c\,\vec{\boldsymbol{e}}_\theta = V\left(cos(\alpha)\,\vec{\boldsymbol{e}}_r + sin(\alpha)\,\vec{\boldsymbol{e}}_z\right) \tag{2.16}$$

onde V e α são a velocidade e a inclinação resultante do lançamento. (A inclinação que garante o melhor alcance é $\alpha = 45\,°$ e então $R - d = \frac{V^2}{g}$, ou seja $V = \sqrt{g\,(R-d)}$).

$$\vec{\boldsymbol{v}}_o = V\left(cos(\alpha)\,\vec{\boldsymbol{e}}_r - \frac{d\,\omega_c}{V}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\theta + sin(\alpha)\,\vec{\boldsymbol{e}}_z\right) \tag{2.17}$$

A direcção horizontal de $\vec{\boldsymbol{v}}_o$ é assim desviada da direcção radial referida $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ dum ângulo negativo (i.e. para trás)

$$\vartheta_o = -ArcTan\left(\frac{d\,\omega_c}{V\,cos(\alpha)}\right) \tag{2.18}$$