1º Teste de Mecânica e Ondas

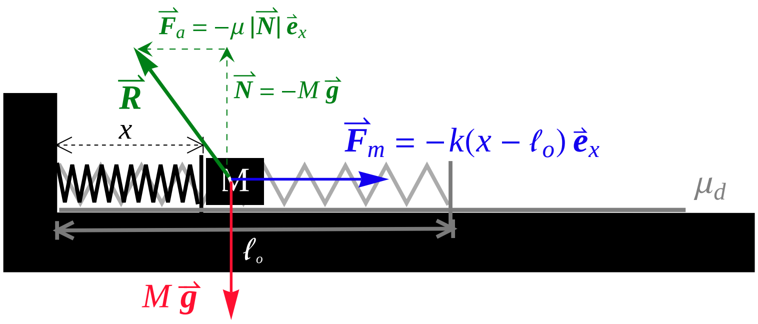
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Qui 17h30-18h30 P8
15 de Abril 2010

(Teste a)

1. Uma massa M está ligada a uma mola de constante elástica k e massa desprezável e desloca-se horizontalmente sobre uma superfície com coeficiente de atrito dinâmico μ_d e estático μ_e.

1- a) (1 val.)
Faça um diagrama das forças que actuam em geral sobre a massa M, assumindo que a mola tem um comprimento natural ℓ_o.



$$\text{Forças} \rightarrow \begin{cases} \vec{R} & \textit{Reacção da superfície} \\ \vec{F}_m & \textit{Força elástica da mola} \\ M\,\vec{g} & \textit{Peso da massa } M \end{cases} ; \tag{1.1}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_a + \vec{N} \;\rightarrow\; \begin{cases} \vec{F}_a = -\mu\,M\,g\,\vec{e}_x & \textit{Componente de atrito} \\ \vec{N} = -M\,\vec{g} & \textit{Componente normal} \end{cases}$$

1- b) (2 val.)
Determine em que condições é que a compressão inicial da mola $(x_o - \ell_o)$ é suficiente para que a massa se comece a deslocar e escreva as equações de movimento em geral.

A força elástica da mola $\vec{F}_m = -k(x_o - \ell_o)\,\vec{e}_x$ deve ser suficiente para vencer a força de atrito estático máxima $\vec{F}_{a_e} = -\mu_e\,M\,g\,\vec{e}_x$, isto é

$$-k(x_o - \ell_o) \geq \mu_e\,M\,g \qquad \therefore \qquad (\ell_o - x_o) \geq \frac{\mu_e\,M\,g}{k} \tag{1.2}$$

A equação de movimento é em geral (usando μ_d para o coeficiente de atrito dinâmico)

$$M\,\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}_m + \vec{\boldsymbol{R}} + M\,\vec{\boldsymbol{g}} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} M\,a_x = -k\,(x-\ell_o) - \mu_d\,M\,g\,Sign(v_x) \\ M\,a_y = 0 = -M\,g\, + N \end{cases} \tag{1.3}$$

1- c) (3 val.)
Qual é a razão entre a elongação máxima $(x_{max} - \ell_o)$ da mola, atingida após uma compressão inicial $(x_o - \ell_o)$ arbitrária? (A distância x_{max} corresponde ao ponto em que a massa M pára pela primeira vez no seu movimento forçado pela mola).

$$\frac{1}{2}\,k(x_o-\ell_o)^2 = \frac{1}{2}\,k(x_{max}-\ell_o)^2 + \mu_d\,M\,g\,(x_{max}-x_o) \tag{1.4}$$

$$\rho = \frac{(x_{max}-\ell_o)}{(x_o-\ell_o)} \tag{1.5}$$

$$1 = \rho^2 + \frac{2\,\mu_d\,M\,g}{k\,(x_o-\ell_o)}\,(\rho-1) \quad \therefore \quad (\rho-1)\,(\rho+1) + \frac{2\,\mu_d\,M\,g}{k\,(x_o-\ell_o)}\,(\rho-1) = 0$$

$$\rho = -1 + \frac{2\,\mu_d\,M\,g}{k\,(\ell_o - x_o)} \tag{1.6}$$

1- d) (2 val.)
Determine o trabalho realizado pelas diferentes forças que actuam na massa entre a posição inicial x_o e o ponto x_{max} em que a massa M pára.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_a = -\mu_d\,M\,g\,\vec{\boldsymbol{e}}_x \qquad \therefore \qquad W_a = \int_{x_o}^{x_{max}} \vec{\boldsymbol{F}}_a \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -\mu_d\,M\,g(x_{max}-x_o) = -\mu_d\,\mu_e\,\frac{M^2\,g^2}{k} \tag{1.7}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_m = -k(x-\ell_o)\,\vec{\boldsymbol{e}}_x \qquad \therefore \qquad W_m = \int_{x_c}^{\ell_o} \vec{\boldsymbol{F}}_m \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\,k(x_c-\ell_o)^2 = \frac{1}{2}\,\mu_e{}^2\,\frac{M^2\,g^2}{k} \tag{1.8}$$

1- e) (2 val.)
Qual é a compressão inicial da mola para que a massa não consiga voltar para trás depois de atingir o ponto de elongação máxima calculado anteriormente?

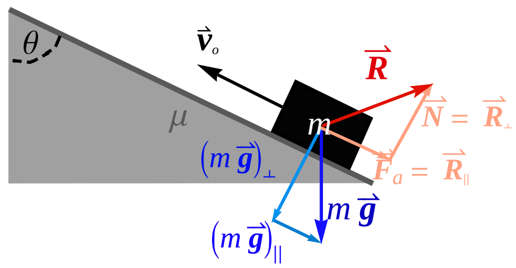
$$k\,(x_{max}-\ell_o) \le \mu_e\,M\,g \quad \therefore \quad (x_o-\ell_o)\,\xi \le \frac{\mu_e\,M\,g}{k} \implies -(x_o-\ell_o) - \frac{2\,\mu_d\,M\,g}{k} \le \frac{\mu_e\,M\,g}{k} \tag{1.9}$$

$$\ell_o - x_o \le \frac{M\,g}{k}\left(\mu_e - 2\,\mu_d\right)s \tag{1.10}$$

2. Uma massa m é atirada com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_o$ a subir uma rampa com atrito dinâmico de coeficiente μ_d.

2- a) (1 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre a massa em movimento. Determine a magnitude das forças envolvidas.

Designando por $\vec{\boldsymbol{e}}_{||}$ e $\vec{\boldsymbol{e}}_{\perp}$ as direcções respectivamnete paralelas e perpendiculares à rampa de forma que $\vec{\boldsymbol{v}}_o = v_o\,\vec{\boldsymbol{e}}_{||}$, temos o seguimte diagrama de forças onde $\vec{\boldsymbol{R}}$ designa a reacção da rampa na massa m:



$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = m\,\vec{\boldsymbol{g}} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{F}}_a \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{N}} = mg\,Sin[\theta]\,\vec{\boldsymbol{e}}_\perp \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{F}}_a = -\mu_d\,mg\,Sin[\theta]\,\vec{\boldsymbol{e}}_{||} \tag{2.11}$$

2- b) (2 val.)
Escreva a equação de movimento da massa m.

$$m\,\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{R}} = -mg\,Cos[\theta]\,\vec{\boldsymbol{e}}_{||} - \mu_d\,mg\,Sin[\theta]\,\vec{\boldsymbol{e}}_{||} \tag{2.12}$$

2- c) (3 val.)
Determine o espaço percorrido pela massa até parar. A que altura sobe?

Usando o teorema trabalho-energia, designando por L a distância percorrida pela massa m ao longo da rampa até parar,

$$W_L = \int_L \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\,\vec{\boldsymbol{r}}_{||} = -\frac{1}{2}\,m\,v_o^2 \tag{2.13}$$

Por outro lado, usando $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{R}}$ para a força total sobre a massa m, obtemos explícitamente

$$W_L = \int_L \left(\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{R}}\right)\cdot d\,\vec{\boldsymbol{r}}_{||} = \int_L \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\,\vec{\boldsymbol{r}}_{||} + \int_L \vec{\boldsymbol{F}}_a\cdot d\,\vec{\boldsymbol{r}}_{||} = -mgCos[\theta]\,L - \mu_d\,mgSin[\theta]\,L \tag{2.14}$$

Igualando as duas expressões

$$-\frac{1}{2}\,m\,v_o^2 = -mg\,Cos[\theta]\,L - \mu_d\,mg\,Sin[\theta]\,L \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{1}{2\,g}\left(\frac{v_o^2}{Cos[\theta] + \mu_d\,Sin[\theta]}\right) \tag{2.15}$$

A altura que m sobe é a projecção desta distância na direcção vertical.

$$h = L\,Cos[\theta] \tag{2.16}$$

2- d) (2 val.)
Calcule o trabalho realizado por cada força que actua sobre m nesse trajecto.

$$W_g = -mg\,Cos[\theta]\,L \quad ; \quad W_R = -\mu_d\,mg\,Sin[\theta]\,L \tag{2.17}$$

(2 val.)
Qual o ângulo θ_c a partir do qual a massa m não volta a descer depois de parar?

A força de atrito estático $\vec{F}_{a_e}$ deve neste caso ser igual à componente paralela à rampa do peso $(m\,\vec{g})_{||}$ quando a inclinação é isuficiente para haver movimento espontâneo. A sua expressão $\vec{F}_{a_e} = \mu_e\,|\vec{N}|\,\vec{e}_\perp$ é válida apenas quando $\theta = \theta_c$, porque para $\theta < \theta_c$ (inclinações maiores) não é possível manter a massa m em equilíbrio, e para $\theta > \theta_c$ (inclinações menores) $|\vec{F}_{a_e}| < \mu_e\,|\vec{N}|$. Note-se que no ponto em que a massa m pára, $\vec{F}_{a_e}$aponta no sentido ascendente da rampa, enquanto $(m\,\vec{g})_{||}$ é sempre no sentido descendente da rampa.

$$\vec{F}_{a_e} + (m\,\vec{g})_{||} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_e\, m\, g\, Sin[\theta_c] = m\, g\, Cos[\theta_c] \tag{2.18}$$

$$Tan[\theta_c] = \frac{1}{\mu_e} \tag{2.19}$$