1º Teste de Mecânica e Ondas

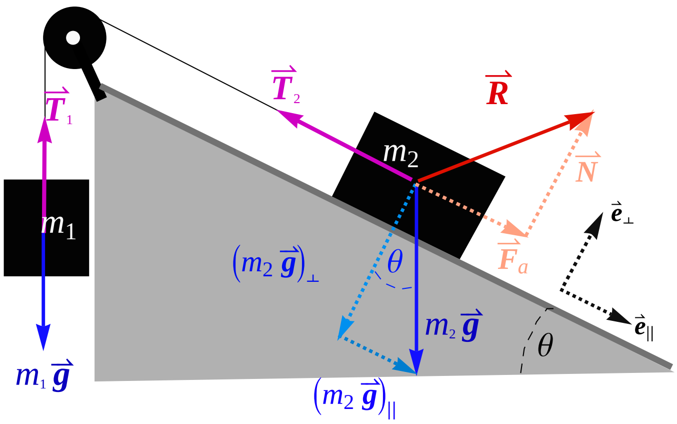
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Qui 15:30 - 16:30 –P8
15 de Abril 2010

(Teste b)

1. Uma massa m_2 está posicionada numa superfície com atrito e pode-se ligar por um fio inextensível de massa desprezável a uma massa m_1, pendurada sem contacto com a parede como indica a figura. Designe o coeficiente de atrito estático da rampa por μ_e e o coeficiente de atrito dinâmico por μ_d. Assuma que a inclinação θ da rampa não é suficiente para a massa m_1 se começar a movimentar quando livre.

1- a) (2 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento.



1- b) (2 val.)
Determine a massa m_1 mínima para que a massa m_2 se comece a deslocar para cima.

$$\begin{cases} m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{T}_1 = -m_1\,\vec{g} \qquad \textit{em consequência} \quad \vec{T}_2 = -m_1\,g\,\vec{e}_{||} \\ \vec{a}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = -m_2\,\vec{g} - \vec{T}_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \vec{R}_\perp \equiv \vec{N} = -(m_1\,\vec{g})_\perp \qquad \textit{em consequência} \quad \vec{N} = m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ \vec{R}_{||} \equiv \vec{F}_a = -(m_1\,\vec{g})_{||} - \vec{T}_2 \quad \textit{em consequência} \quad \vec{F}_{a_e} = (-m_2\,g\,Sin[\theta] + m_1\,g)\,\vec{e}_{||} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\vec{F}_{a_e} = \mu_e\,|\vec{N}|\,\vec{e}_{||} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_e\,m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_{||} = (-m_2\,Sin[\theta] + m_1)\,g\,\vec{e}_{||} \tag{1.4}$$

$$m_1 = m_2(\mu_e\, Cos[\theta] + Sin[\theta]) \tag{1.5}$$

1- c) (3 val.)
Determine a expressão para a aceleração das massas em movimento quando m_2 for maior que o mínimo calculado anteriormente.

- Nota: Aqui há uma gralha: queria dizer "quando m_1 for maior que o mínimo calculado anteriormente". Nesse caso a massa m_1 sobe sempre e o sinal + deve ser tomado na definição de $\vec{F}_a$. Serão consideradas correctas respostas com m_1 a descer.

Em movimento $\vec{F}_a = \pm\mu_d\, |\vec{N}|\, \vec{e}_{||} = \pm\mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta]\, \vec{e}_{||}$. Por outro lado $a_2 = -a_1 = -a$

$$\begin{cases} m_1\, a = m_1\, g - T \\ -m_2\, a = m_2\, g\, Sin[\theta] - T \pm \mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta] \end{cases} \Longrightarrow \quad a = \frac{m_1 - m_2\big(Sin[\theta] \pm \mu_d\, Cos[\theta]\big)}{(m_1 + m_2)}\, g \tag{1.6}$$

1- d) (2 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa m_2 suba uma altura h.

Para um movimento uniformemente acelerado com aceleração a vertical partindo do repouso a equação de movimento é

$$y - y_o = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\ (y - y_o)}{a}} \tag{1.7}$$

Se a massa m_1 desce ℓ metros em Δt segundos, a massa m_2 sobe $h = \ell\, Sin[\theta]$ no mesmo tempo porque o fio é inextensível. Assim, para que m_2 suba h metros é necessário um tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\, h}{a\, Sin[\theta]}} \tag{1.8}$$

1- e) (2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo e o trabalho total sobre cada massa.

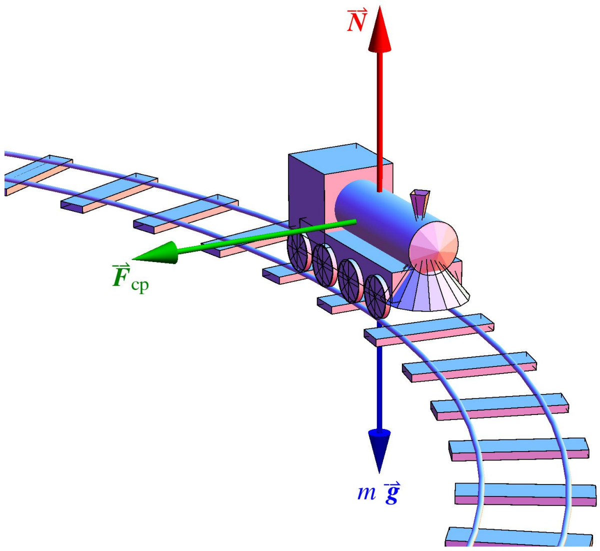
$$\begin{cases} W_{g_1} = m_1\, g\, h \\ W_{T_1} = -T\, h \end{cases} \Longrightarrow \; W_{Tot_1} = (m_1\, g\ - T)\, h \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} W_{g_2} = -m_2\, g\, Sin[\theta]\, \frac{h}{Sin[\theta]} = -m_2\, g\, h \\ W_{T_2} = T\, \frac{h}{Sin[\theta]} \\ W_R = -\mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta]\, \frac{h}{Sin[\theta]} = -\mu_d\, m_2\, g\, Cot[\theta] \end{cases} \Longrightarrow \; W_{Tot_2} = \tag{1.10}$$

$$-(m_2\, g - T)\, h - \mu_d\, m_2\, g\, Cot[\theta]$$

2. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em movimento uniforme sobre carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio se desloca com velocidade V_c:

(2 val.)
Faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio assumindo que não há atrito dinâmico entre as rodas e os carris (i.e. não há derrapagem). Determine o trabalho realizado por cada força ao fim de uma volta.



- Todas as forças são perpendiculares ao deslocamento do comboio, pelo que em todos os casos $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

$$W_g = W_N = W_{F_{cp}} = 0 \tag{2.11}$$

2- b) (1 val.)
Determine uma expressão para o tempo T que leva a fazer uma volta completa.

$$T = \frac{2\pi R}{V_c} \times \frac{1}{60} (min) \tag{2.12}$$

2- c) (3 val.)
Se as rodas do comboio têm um raio $r = 10^{-4} R$, quantas rotações por minuto f_r devem fazer neste regime?

- O perímetro de cada roda é $2\pi r$, pelo que para cobrir a distância $2\pi R$ de uma volta, o que leva T minutos, têm que rodar n vezes.

$$2\pi r n = 2\pi R \quad \therefore \quad n = \frac{R}{r} = 10^4 \quad \Longrightarrow \quad f_r = \frac{n}{T} = \frac{10^4}{T} (rpm) \tag{2.13}$$

2- d) (4 val.)
Qual a distância que o comboio tem de percorrer até parar se mantiver uma desaceleração angular uniforme $\alpha = \frac{V_c^2}{8\pi R^2}$?

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} \equiv \omega(t) = \frac{V_c}{R} - \alpha t \\ \theta(t) - \theta_o = \frac{V_c}{R} t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\omega(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{V_c}{\alpha R} \quad \therefore \quad \Delta\theta = \theta(t_f) - \theta_o = 4\pi = 2\, voltas \tag{2.15}$$