1º Teste de Mecânica e Ondas

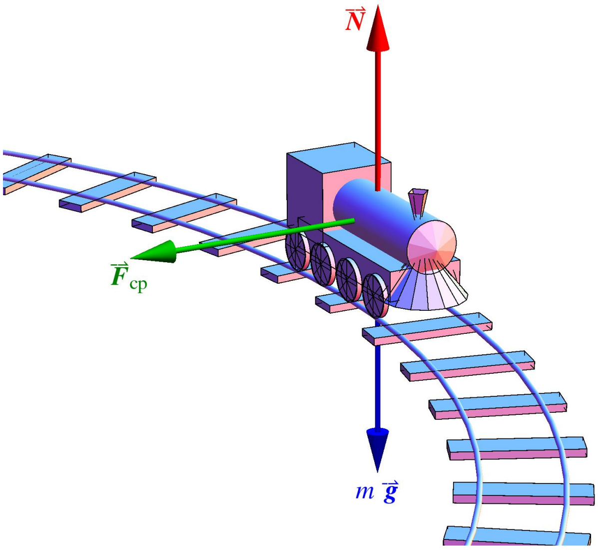
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Qui 15:30 - 16:30 – P8
15 de Abril 2010

(Teste a)

1. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio leva T minutos a fazer uma volta completa em movimento uniforme:

1- a) (2 val.)
Faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio assumindo que não há atrito dinâmico entre as rodas e os carris (i.e. não há derrapagem). Determine o trabalho realizado por cada força ao fim de uma volta.



- Todas as forças são perpendiculares ao deslocamento do comboio, pelo que em todos os casos $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

$$W_g = W_N = W_{F_{cp}} = 0 \tag{1.1}$$

1- b) (3 val.)
Se as rodas do comboio têm um raio $r = 10^{-3} R$, quantas rotações por minuto f_r devem fazer neste regime?

- O perímetro de cada roda é $2\pi r$, pelo que para cobrir a distância $2\pi R$ de uma volta, o que leva T minutos, têm que rodar n vezes.

$$n\,2\pi r = 2\pi R \quad \therefore \quad n = \frac{R}{r} = 10^3 \quad \Longrightarrow \quad f_r = \frac{n}{T} = \frac{10^3}{T} \; (rpm) \tag{1.2}$$

1- c) (1 val.)
Determine a energia mínima que foi necessária para que o comboio acelerasse do repouso até se deslocar com a presente velocidade V_c.

$$V_c = \frac{2\pi R}{60\times T}\left(\frac{m}{s}\right) \Longrightarrow W = \frac{1}{2} M V_c^2 = \frac{2 M \pi^2 R^2}{3600\times T^2}\,(J) \tag{1.3}$$

1- d) (4 val.)
Ao fim de quantas voltas é que o comboio, partindo do repouso, atinge a velocidade V_c se mantivesse uma aceleração uniforme $a = \frac{\pi R}{4 T^2}$?

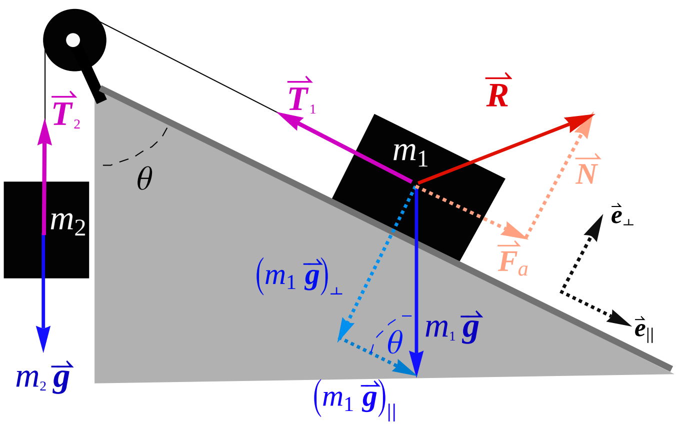
- A aceleração linear a corresponde a uma aceleração angular $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{\pi}{4 T^2}$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} \equiv \omega(t) = \alpha\, t \\ \theta(t) - \theta_o = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\omega(t_f) = \frac{V_c}{R} \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{V_c}{\alpha R} = 8\,T\ (min) \;\therefore\quad \Delta\theta = \theta(t_f) - \theta_o = 8\pi = 4\,voltas \tag{1.5}$$

2. Uma massa m_1 está posicionada numa superfície com atrito e pode-se ligar por um fio inextensível de massa desprezável a uma massa m_2, pendurada sem contacto com a parede como indica a figura. Designe o coeficiente de atrito estático da rampa por μ_e e o coeficiente de atrito dinâmico por μ_d. Assuma que a inclinação θ da rampa não é suficiente para a massa m_1 se começar a movimentar quando livre.

2- a) (1 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento.



- Em movimento

$$\begin{cases} m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 \\ m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

- Em equilíbrio

$$\begin{cases} \vec{a}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{T}_2 = -m_2\,\vec{g} \qquad \Leftrightarrow \quad \vec{T}_1 = -m_2\,g\,\vec{e}_{||} \\ \vec{a}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = -m_1\,\vec{g} - \vec{T}_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

(2 val.)
Determine a massa m_2 mínima para que a massa m_1 se comece a deslocar para cima.

$$\begin{cases} \vec{R}_\perp \equiv \vec{N} = -\left(m_1\, \vec{g}\right)_\perp & \Leftrightarrow \quad \vec{N} = m_1\, g\, Sin[\theta]\, \vec{e}_\perp \\ \vec{R}_{||} \equiv \vec{F}_a = -\left(m_1\, \vec{g}\right)_{||} - \vec{T}_1 & \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{a_e} = (-m_1\, g\, Cos[\theta] + m_2\, g)\, \vec{e}_{||} \end{cases} \tag{2.8}$$

A força de atrito estático máxima sendo no limite $\vec{F}_{a_e} = \mu_e\, |\vec{N}|\, \vec{e}_{||}$, a massa m_2 tem que ser tal que se esteja no limite de validade da equação

$$\vec{F}_{ae} = \mu_e\, |\vec{N}|\, \vec{e}_{||} = -\left(m_1\, \vec{g}\right)_{||} - \vec{T}_1 \tag{2.9}$$

$$\mu_e\, m_1\, g\, Sin[\theta] = -m_1\, g\, Cos[\theta] + m_2\, g \tag{2.10}$$

$$m_2 = m_1(\mu_e\, Sin[\theta] + Cos[\theta]) \tag{2.11}$$

2- c) (4 val.)
Determine a expressão para a aceleração das massas em movimento e a tensão T no fio quando m_2 for maior que o mínimo calculado anteriormente.

$$\begin{cases} -m_1\, a = m_1\, g\, Cos[\theta] - T + \mu_d\, m_1\, g\, Sin[\theta] & \therefore \quad a = \dfrac{m_2 - m_1\left(Cos[\theta] + \mu_d\, Sin[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\, g \\ m_2\, a = m_2\, g - T & \therefore \quad T = \dfrac{m_1\, m_2\left(1 + Cos[\theta] + \mu_d\, Sin[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\, g \end{cases} \tag{2.12}$$

2- d) (3 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa m_1 suba uma altura h.

Para a massa m_2 num movimento uniformemente acelerado com aceleração a vertical partindo do repouso a equação de movimento é

$$y - y_o = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\ (y - y_o)}{a}} \tag{2.13}$$

Se a massa m_2 desce ℓ metros em Δt segundos, a massa m_1 sobe $h = \ell\, Cos[\theta]$ no mesmo tempo porque o fio é inextensível. Assim, para que m_1 suba h metros é necessário um tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\, h}{a\, Cos[\theta]}} \tag{2.14}$$