1º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Qua 17:00 - 18:00 - Q5.1
12 - 16 de Abril 2010

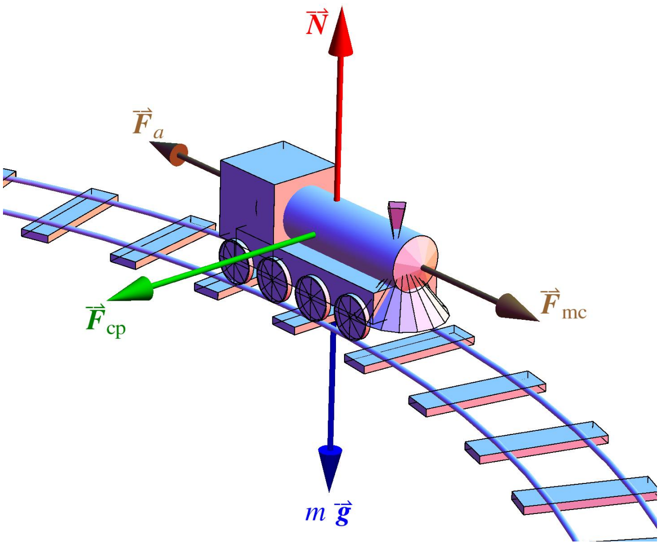
(Teste b)

1. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em movimento uniforme sobre carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio se desloca com velocidade V_c:

1- a) (1 val.)
Determine uma expressão para o tempo T que leva a fazer uma volta completa.

$$T = \frac{2\pi R}{V_c} \tag{1.1}$$

1- b) (3 val.)
Se a reacção lateral (horizontal) dos carris sobre as rodas do comboio causar um atrito com um coeficiente dinâmico μ_d, faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio (assumindo que as rodas não derrapam sobre os carris).



Designando por $\vec{e}_v = \frac{\vec{V}_c}{V_c}$ a direcção de deslocamento do comboio, as forças que actuam neste são:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = m\,\vec{g} & \text{Peso do comboio} \\ \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{F}_{cp} & \text{Reacção dos carris onde} \begin{cases} \vec{F}_a = -\mu_d\,|\vec{F}_{cp}|\,\vec{e}_V & \text{Força de atrito dinâmico} \\ \vec{N} = -m\,\vec{g} & \text{Componente normal da reac} \\ \vec{F}_{cp} = -m\,\frac{V_c^2}{R}\,\vec{e}_r & \text{Força centrípeta} \end{cases} \\ \vec{F}_{mc} = -\vec{F}_a & \text{Força motriz do comboio} \end{cases} \tag{1.2}$$

A força centrípeta é radial e de magnitude $M\,\frac{V_c^2}{R}$, pelo que

$$\vec{F}_a = -\mu_d\,M\,\frac{V_c^2}{R}\left(\frac{\vec{V}_c}{V_c}\right) = -\mu_d\,\frac{M\,V_c}{R}\,\vec{V}_c \tag{1.3}$$

Para manter uma velocidade constante é necessário que exista uma força motriz $\vec{F}_{mc}$ sobre o comboio para compensar o atrito.

$$\vec{F}_{mc} = -\vec{F}_a \tag{1.4}$$

1- c) (3 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força que actua no comboio ao fim de uma volta.

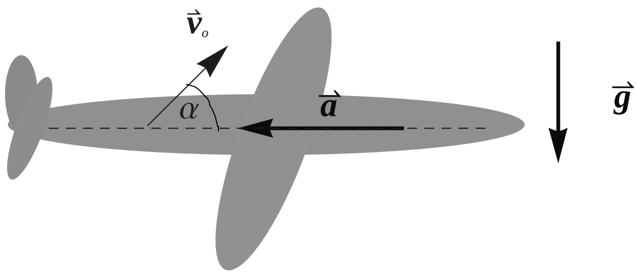
$$\begin{cases} W_{mg} = W_N = W_{F_{cp}} = 0 & \textit{estas forças são perpendiculares ao deslocamento} \\ W_{F_a} = -2\,\pi\,\mu_d\,M\,V_c^2 & \textit{a força de atrito constante dissipa energia} \\ W_{F_{mc}} = -W_{F_a} & \textit{a força motriz do comboio compensa esta perda de energia} \end{cases} \tag{1.5}$$

1- d) (3 val.)
Assuma agora que o comboio, inicialmente com velocidade V_c, começa a travar com uma desaceleração constante $a = \frac{V_c^2}{8\,\pi\,R}$. Deduza a dependência de ω e θ em função de t. Ao fim de quantas voltas é que o comboio pára?

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha \quad \therefore \quad \omega(t) = \frac{V_c}{R} - \alpha\,t \qquad \Longrightarrow \quad \theta(t) - \theta_o = \frac{V_c}{R}\,t - \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \tag{1.6}$$

$$t = \frac{V_c}{\alpha\,R} = \frac{8\,\pi\,R}{V_c} \quad \therefore \quad \Delta\theta = 4\,\pi \tag{1.7}$$

2. Um corpo de massa m é lançado com velocidade v_o e inclinação α relativamenta ao chão de um avião que se desloca com aceleração constante $\vec{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, g\, \vec{\boldsymbol{e}}_x$ paralelamente à superfície da Terra.



2- a) (2 val.)
Qual é a "aceleração gravítica aparente" sentida pelos objectos dentro do avião?

$$\vec{\boldsymbol{g}}' = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, g\, \vec{\boldsymbol{e}}_x - g\, \vec{\boldsymbol{e}}_z \tag{2.8}$$

2- b) (1 val.)
Qual a inclinação da vertical dentro do avião relativamente à vertical definida por $\vec{\boldsymbol{g}}$ no referencial da Terra?

$$\vec{\boldsymbol{g}}' \cdot \vec{\boldsymbol{g}} = \left|\vec{\boldsymbol{g}}'\right| \left|\vec{\boldsymbol{g}}\right| Cos[\theta] \qquad \therefore \qquad Cos[\theta] = \frac{\vec{\boldsymbol{g}}' \cdot \vec{\boldsymbol{g}}}{\left|\vec{\boldsymbol{g}}'\right| \left|\vec{\boldsymbol{g}}\right|} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} \tag{2.9}$$

$$\theta = ArcCos\left[\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}\right] = \frac{\pi}{6} \textit{ inclinado para a trás em relação à vertical.} \tag{2.10}$$

2- c) (2 val.)
Escreva a equação de movimento da massa m no referencial ligado ao avião. Que consequências deduz para o movimento de m dentro do avião comparando com a equação de movimento dum grave no referencial da Terra?

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -a \;\;\therefore\;\; v_x = v_o\, Cos[\alpha] - a\, t = v_o\, Cos[\alpha] + \dfrac{g}{\sqrt{3}}\, t \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g \;\;\therefore\;\; v_y = v_o\, Sin[\alpha] - g\, t \end{cases} \tag{2.11}$$

2- d) (3 val.)
Calcule o tempo que a massa m leva a subir e a voltar a descer no avião.

- Este tempo é igual ao que se observa para a Terra, porque a componente y do movimento é idêntica

$$v_y = v_o\, Sin[\alpha] - g\, t_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_s = \frac{v_o\, Sin[\alpha]}{g} \tag{2.12}$$

$$y - y_o = \left(v_o\, Sin[\alpha] - \frac{1}{2}\, g\, t_{sd}\right) t_{sd} \;\Longrightarrow\; t_{sd} = \frac{2\, v_o\, Sin[\alpha]}{g} = 2\, t_s \tag{2.13}$$

(2 val.)
Se $\alpha = \pi / 4$ a que distância é que o objecto cai do ponto de partida dentro do avião?

$$x = v_{xo}\, t - \frac{1}{2}\, a\, t^2 \implies x_f = \left(v_{xo} - \frac{1}{2}\, a\, t_{sd} \right) t_{sd} \tag{2.14}$$

$$x_f = \left(v_{xo} - a\, \frac{v_{yo}}{g} \right) 2\, \frac{v_{yo}}{g} \tag{2.15}$$

$$x_f = \frac{\left(3 + \sqrt{3} \right) v_o^2}{3\, g} \quad (m) \tag{2.16}$$