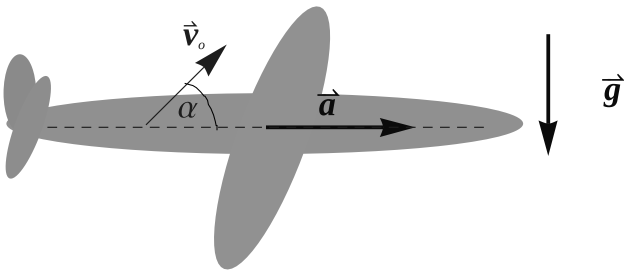
1º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Qua 17:00 - 18:00 - Q5.1
12 - 16 de Abril 2010

(Teste a)

1. Um corpo de massa m é lançado com velocidade v_o e inclinação α relativamente ao chão de um avião que se desloca com aceleração constante $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} g\, \vec{e}_x$ paralela à superfície da Terra.



1- a) (2 val.)
Qual é a "aceleração gravítica aparente" sentida pelos objectos dentro do avião?

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a} \tag{1.1}$$

1- b) (1 val.)
Qual a inclinação da vertical dentro do avião relativamente à vertical definida por $\vec{g}$ no referencial da Terra?

$$\vec{g}' \cdot \vec{g} = |\vec{g}'|\,|\vec{g}|\, Cos[\theta] \qquad \therefore \qquad Cos[\theta] = \frac{\vec{g}' \cdot \vec{g}}{|\vec{g}'|\,|\vec{g}|} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} \tag{1.2}$$

$$\theta = ArcCos\left[\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}\right] = \frac{\pi}{6} \text{ inclinado para a frente em relação a vertical.} \tag{1.3}$$

1- c) (2 val.)
Escreva a equação de movimento da massa m no referencial ligado ao avião. Que consequências deduz para o movimento de m dentro do avião comparando com a equação de movimento dum grave no referencial da Terra?

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \vec{a} \implies \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -a \quad \therefore \quad v_x = v_o\, Cos[\alpha] - a\, t = v_o\, Cos[\alpha] - \frac{g}{\sqrt{3}}\, t \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \quad \therefore \quad v_y = v_o\, Sin[\alpha] - g\, t \end{cases} \tag{1.4}$$

É um movimento uniformemente acelerado tanto na vertical como na horizontal, enquanto que na Terra a componente horizontal do moviemento é uniforme.

1- d) (3 val.)
Calcule o tempo que a massa m leva a subir e a voltar a descer no avião.

- Este tempo é igual ao que se observa para a Terra, porque a componente y do movimento é idêntica

$$v_y = v_o\, Sin[\alpha] - g\, t_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_s = \frac{v_o\, Sin[\alpha]}{g} \tag{1.5}$$

$$y - y_o = \left(v_o\, Sin[\alpha] - \frac{1}{2}\, g\, t_{sd}\right) t_{sd} \quad \Longrightarrow \quad t_{sd} = \frac{2\, v_o\, Sin[\alpha]}{g} = 2\, t_s \tag{1.6}$$

1- e) (2 val.)
Se $\alpha = \pi/2$ a que distância é que o objecto cai do ponto de partida dentro do avião?

$$x = v_{xo}\, t\; - \frac{1}{2}\, a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \left(v_{xo} - \frac{1}{2}\, a\, t\right) t \tag{1.7}$$

$$x = \left(v_{xo} - a\, \frac{v_{yo}}{g}\right) \frac{2\, v_{yo}}{g} \tag{1.8}$$

$$x_f = -\frac{2\, v_o^2}{\sqrt{3}\; g} \;\; (m) \tag{1.9}$$

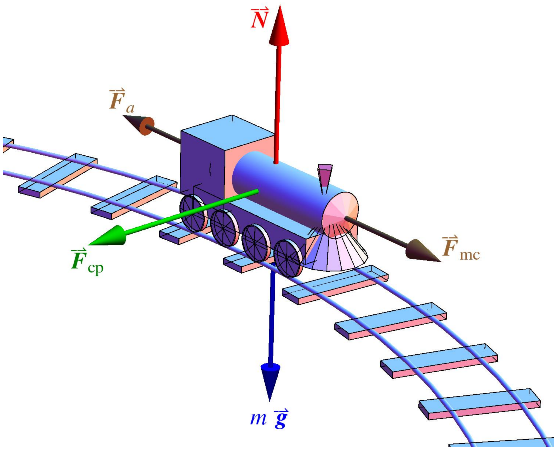
---

2. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio leva T minutos a fazer uma volta completa em movimento uniforme:

2- a) (1 val.)
Determine a velocidade V_c a que o comboio se desloca.

$$V_c = \frac{2\, \pi\, R}{60 \times T} \quad \left(\frac{m}{s}\right) \tag{2.10}$$

2- b) (3 val.)
Se a reacção lateral (horizontal) dos carris sobre as rodas do comboio causar um atrito com um coeficiente dinâmico μ_d, faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio (assumindo que as rodas não derrapam sobre os carris).



Designando por $\vec{e}_v = \frac{\vec{V}_c}{V_c}$ a direcção de deslocamento do comboio, as forças que actuam neste são:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = m\,\vec{g} & \text{Peso do comboio} \\ \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{F}_{cp} & \text{Reacção dos carris onde} \begin{cases} \vec{F}_a = -\mu_d\,|\vec{F}_{cp}|\,\vec{e}_v & \text{Força de atrito dinâmico} \\ \vec{N} = -m\,\vec{g} & \text{Componente normal da rea} \\ \vec{F}_{cp} = -m\,\frac{V_c^2}{R}\,\vec{e}_r & \text{Força centrípeta} \end{cases} \\ \vec{F}_{mc} = -\vec{F}_a & \text{Força motriz do comboio} \end{cases} \tag{2.11}$$

A força centrípeta é radial e de magnitude $M\,\frac{V_c^2}{R}$, pelo que

$$\vec{F}_a = -\mu_d\,M\,\frac{V_c^2}{R}\left(\frac{\vec{V}_c}{V_c}\right) = -\mu_d\,\frac{M\,V_c}{R}\,\vec{V}_c \tag{2.12}$$

Para manter uma velocidade constante é necessário que exista uma força motriz $\vec{F}_{mc}$ sobre o comboio para compensar o atrito.

$$\vec{F}_{mc} = -\vec{F}_a \tag{2.13}$$

2- c) (3 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força que actua no comboio ao fim de uma volta.

$$\begin{cases} W_{mg} = W_N = W_{F_{cp}} = 0 & \textit{estas forças são perpendiculares ao deslocamento} \\ W_{F_a} = -2\,\pi\,\mu_d\,M\,V_c^2 & \textit{a força de atrito constante dissipa energia} \\ W_{F_{mc}} = -W_{F_a} & \textit{a força motriz do comboio compensa esta perda de energia} \end{cases} \tag{2.14}$$

2- d) (3 val.)
Assuma agora que o comboio, inicialmente com velocidade V_c, começa a travar, com uma desaceleração uniforme $\alpha = \frac{\pi}{4\,T^2}$. Deduza a dependência de ω e θ em função de t. Ao fim de quantas voltas é que o comboio pára?

Aqui $\alpha \left(\frac{rad}{s^2}\right)$ é uma aceleração angular, como tal a derivada de uma velocidade angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Sendo constante, a sua integração é similar à do movimento uniformemente acelerado com velocidade angular inicial $\omega_o = \frac{V_c}{R}$ e ângulo inicial θ_o.

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{V_c}{R} - \alpha\, t \\ \theta(t) - \theta_o = \dfrac{V_c}{R}\, t - \dfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2 \end{cases} \tag{2.15}$$

Quando o comboio pára $\omega(t) = 0$ pelo que, usando $V_c = \frac{2\pi R}{T} \left(\frac{m}{min}\right)$

$$t_f = \frac{V_c}{\alpha R} = 8\,T \quad (min) \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \theta\left(t_f\right) - \theta_o = 8\,\pi \;\; ou\, seja\, 4\, voltas. \tag{2.16}$$