1º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Ter 14:00 - 15:00 –V1.13
13 de Abril 2010

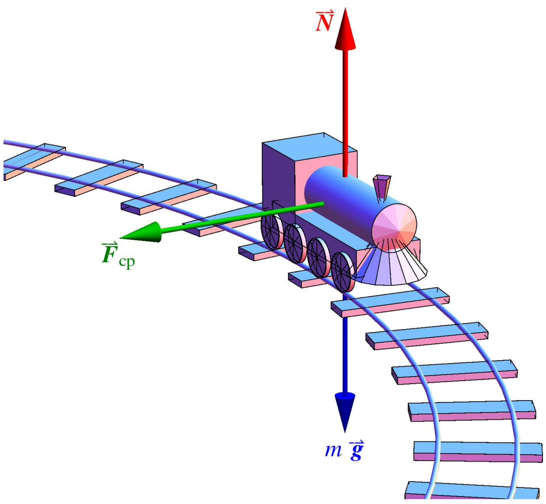
(Teste b)

1. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em movimento uniforme sobre carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio se desloca com velocidade V_c:

1- a) (1 val.)
Determine uma expressão para o tempo T que leva a fazer uma volta completa.

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{V_c} \tag{1.1}$$

1- b) (2 val.)
Faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio assumindo que não há atrito dinâmico entre as rodas e os carris (i.e. não há derrapagem). Determine o trabalho realizado por cada força ao fim de uma volta.



Designando por $\vec{e}_v = \frac{\vec{V}_c}{V_c}$ a direcção de deslocamento do comboio, as forças que actuam neste são:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = m\,\vec{g} & \text{Peso do comboio} \\ \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{cp} & \text{Reacção dos carris onde } \begin{cases} \vec{N} = -m\,\vec{g} & \text{Componente normal da reacção} \\ \vec{F}_{cp} = -m\,\frac{V_c^2}{R}\,\vec{e}_r & \text{Força centrípeta} \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

A força centrípeta é radial e de magnitude $M\,\frac{V_c^2}{R}$.

(3 val.)
Se as rodas do comboio têm um raio $r = 10^{-4} R$, quantas rotações por minuto f_r devem fazer neste regime?

$$2\pi r n = 2\pi R \quad \therefore \quad n = \frac{R}{r} = 10^4 \quad \Longrightarrow \quad f_r = n\, f \;=\; 60 \times \frac{10^4}{T} \tag{1.3}$$

1- d) (4 val.)
Assuma agora que o comboio começa a travar, com uma desaceleração constante $a = \frac{V_c^2}{8\pi R}$. Ao fim de quantas voltas é que o comboio pára?

A aceleração angular α relaciona-se com a linear através de $\alpha = \frac{a}{R}$ e é a derivada da velocidade angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Sendo constante a sua integração é semelhante à do movimento uniformemente acelerado. (Por ser uma desaceleração o seu valor deve ser negativo.)

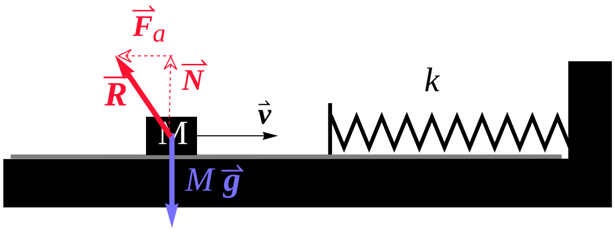
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega(t) = \dfrac{V_c}{R} - \dfrac{a}{R}\, t \\[2mm] \theta(t) - \theta_o = \dfrac{V_c}{R}\, t - \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{R}\, t^2 \end{cases} \tag{1.4}$$

$$t = \frac{V_c}{a} = \frac{8\pi R}{V_c} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = 4\pi \;\; \textit{ou seja 2 voltas.} \tag{1.5}$$

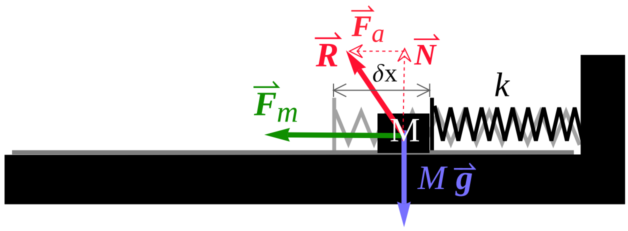
2. Uma massa M é disparada horizontalmente com velocidade v_o numa superfíce com atrito dinâmico μ_d e percorre uma distância L antes de embater numa mola de constante elástica k e massa desprezável.

2- a) (2 val.)
Determine o diagrama das forças aplicadas antes e depois de M estar em contacto com a mola.

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_a + \vec{N} \\ \vec{N} = -M\,\vec{g} \\ \vec{F}_a = -\mu_d\, M\, g\, \vec{e}_x \end{cases} \tag{2.6}$$



$$\vec{F}_m = -k\,\delta x\, \vec{e}_x \tag{2.7}$$



2- b) (4 val.)
Determine o trabalho realizado ao longo da distância L pelas diferentes forças aplicadas na massa M e aproveite o resultado para determinar a velocidade v_1 com que M chega à mola.

$$\vec{F}_a = -\mu_d\, M\, g\, \vec{e}_x \tag{2.8}$$

$$W_a = \frac{1}{2} M v_1^2 - \frac{1}{2} M v_o^2 = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\mu_d\, M\, g\, L \tag{2.9}$$

$$v_1 = \sqrt{v_o^2 - 2\, \mu_d\, g\, L} \tag{2.10}$$

2- c) (4 val.)
Use o teorema trabalho-energia a partir do instante em que a mola começa a actuar sobre M para determinar a deformação δx que a mola sofre quando consegue travar a massa M (não se esqueça da força de atrito).

$$\begin{cases} \vec{F}_m = -k\, \delta\mathrm{x}\, \vec{e}_x & \Rightarrow \quad W_m = -\frac{1}{2} k\, \delta\mathrm{x}^2 \\ \vec{F}_a = -\mu_d\, M\, g\, \vec{e}_x & \Rightarrow \quad W_a = -\mu_d\, M\, g\, \delta\mathrm{x} \end{cases} \tag{2.11}$$

$$-\frac{1}{2} k\, \delta\mathrm{x}^2 - \mu_d\, M\, g\, \delta\mathrm{x} = -\frac{1}{2} M\, v_1^2 \tag{2.12}$$

$$\delta\mathrm{x} = \frac{g\, M\, \mu_d}{k} \left(\sqrt{1 + \frac{k\, v_1^2}{g^2\, M\, \mu_d^2}} - 1 \right) \tag{2.13}$$