1º Teste de Mecânica e Ondas

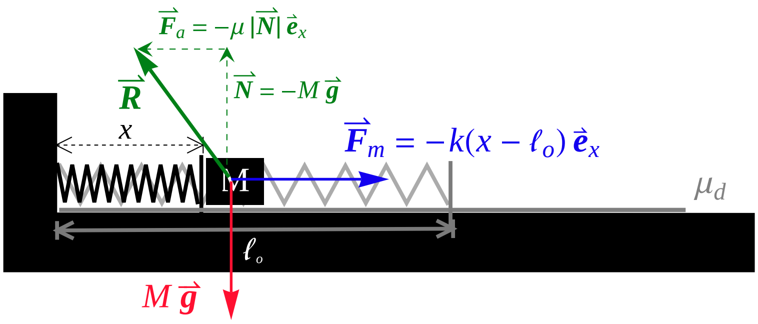
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Ter 14:00 - 15:00 –V1.13
13 de Abril 2010

(Teste a)

1. Uma massa M é empurrada horizontalmente por uma mola de constante elástica k e massa desprezável sobre uma superfície com coeficiente de atrito dinâmico μ_d e estático μ_e.

1- a) (1 val.)
Faça um diagrama das forças que actuam sobre a massa M, assumindo que a mola tem um comprimento natural ℓ_o.



1- b) (2 val.)
Determine a compressão mínima $(x_c - \ell_o)$ da mola para que, quando libertada, a massa M se comece a deslocar sobre a superfíce.

$$\mu_e\,M\,g = -k(x_c - \ell_o) \quad \therefore \quad (x_c - \ell_o) = -\frac{\mu_e\,M\,g}{k} \tag{1.1}$$

1- c) (3 val.)
Determine o trabalho realizado pelas forças que actuam na massa entre a posição inicial e o ponto em que a massa M perderia contacto com a mola.

$$\vec{F}_a = -\mu_d\,M\,g\,\vec{e}_x \qquad \therefore \qquad W_a = \int_{x_c}^{\ell_o} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\mu_d\,M\,g\,(\ell_o - x_c) = -\mu_d\,\mu_e\,\frac{M^2\,g^2}{k} \tag{1.2}$$

$$\vec{F}_m = -k(x-\ell_o)\,\vec{e}_x \qquad \therefore \qquad W_m = \int_{x_c}^{\ell_o} \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\,k\,(x_c - \ell_o)^2 = \frac{1}{2}\,\mu_e{}^2\,\frac{M^2\,g^2}{k} \tag{1.3}$$

1- d) (4 val.)
Determine o espaço L que a massa M percorre depois de se separar da mola e até parar.

Pelo teorema Trabalho-Energia a velocidade v_o de M ao descolar da mola é

$$W_{tot} = \frac{1}{2} M v_o^2 = \frac{1}{2} {\mu_e}^2 \frac{M^2 g^2}{k} - \mu_d \mu_e \frac{M^2 g^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v_o = g \mu_e \sqrt{\frac{M}{k}} \sqrt{1 - \frac{2 \mu_d}{\mu_e}} \tag{1.4}$$

A energia cinética inicial da massa M depois de descolar é dissipada pela força de atrito dinâmico, até que ao parar depois de se deslocar L metros temos o balanço energético $EC_i + W_a = 0$:

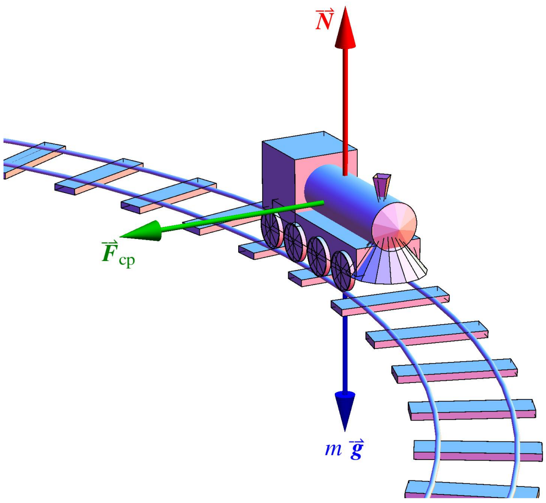
$$\frac{1}{2} M v_o^2 = \mu_d M g L \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{v_o^2}{2 g \mu_d} \tag{1.5}$$

2. Um comboio de massa M descreve uma trajectória circular de raio R em carris montados num plano horizontal. Assumindo que inicialmente o comboio leva T minutos a fazer uma volta completa em movimento uniforme:

2- a) (1 val.)
Determine a velocidade V_c a que o comboio se desloca.

$$V_c = \frac{2 \pi R}{60 \times T} \left(\frac{m}{s}\right) \tag{2.6}$$

2- b) (2 val.)
Faça um diagrama de todas as forças que actuam no comboio assumindo que não há atrito dinâmico entre as rodas e os carris (i.e. não há derrapagem).



Designando por $\vec{e}_v = \frac{\vec{V}_c}{V_c}$ a direcção de deslocamento do comboio, as forças que actuam neste são:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = m \vec{g} & \text{Peso do comboio} \\ \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{cp} & \text{Reacção dos carris onde} \begin{cases} \vec{N} = -m \vec{g} & \text{Componente normal da reacção} \\ \vec{F}_{cp} = -m \frac{V_c^2}{R} \vec{e}_r & \text{Força centrípeta} \end{cases} \end{cases} \tag{2.7}$$

A força centrípeta é radial e de magnitude $M \frac{V_c^2}{R}$.

(3 val.)
Se as rodas do comboio têm um raio $r = 10^{-3}\,R$, quantas rotações por minuto f_r devem fazer neste regime?

$$2\,\pi\,r\,n = 2\,\pi\,R \quad \therefore \quad n = \frac{R}{r} = 10^3 \quad \Longrightarrow \quad f_r = n\,f = \frac{10^3}{T}\,(rpm) \tag{2.8}$$

2- d) (4 val.)
Assuma agora que o comboio começa a travar, com uma desaceleração uniforme $\alpha = \frac{\pi}{4\,T^2}$. Ao fim de quantas voltas é que o comboio pára?

Aqui $\alpha\left(\frac{rad}{s^2}\right)$ é uma aceleração angular, como tal a derivada de uma velocidade angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Sendo constante, a sua integração é similar à do movimento uniformemente acelerado com velocidade angular inicial $\omega_o = \frac{V_c}{R}$ e ângulo inicial θ_o.

$$\frac{d\omega}{dt} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_c}{R} - \alpha\,t \\ \theta\,(t) - \theta_o = \frac{V_c}{R}\,t - \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Quando o comboio pára $\omega(t) = 0$ pelo que, usando $V_c = \frac{2\,\pi\,R}{T}\left(\frac{m}{min}\right)$

$$t_f = \frac{V_c}{\alpha\,R} = 8\,T \;\;(min) \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \theta\left(t_f\right) - \theta_o = 8\,\pi \;\; ou\;seja\;4\;voltas. \tag{2.10}$$