1º Teste de Mecânica e Ondas

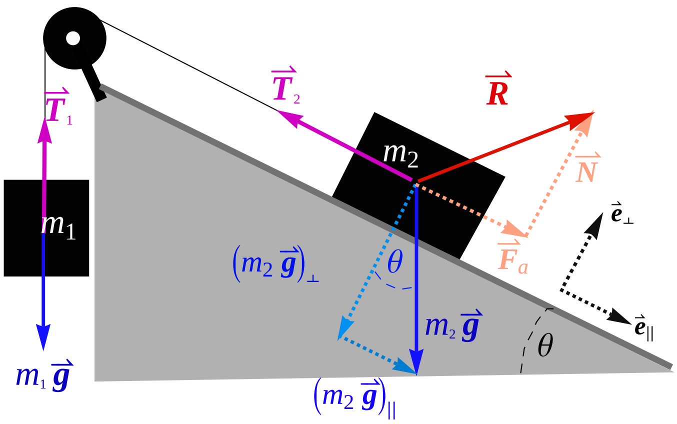
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Seg 16:30 - 17:30 –Q4.2/4.4
12 de Abril 2010

(Teste b)

1. Uma massa m_2 está posicionada numa superfície com atrito e pode-se ligar por um fio inextensível de massa desprezável a uma massa m_1, pendurada sem contacto com a parede como indica a figura. Designe o coeficiente de atrito estático da rampa por μ_e e o coeficiente de atrito dinâmico por μ_d. Assuma que a inclinação θ da rampa não é suficiente para a massa m_1 se começar a movimentar quando livre.

1- a) (2 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento.



1- b) (2 val.)
Determine a massa m_1 mínima para que a massa m_2 se comece a deslocar para cima.

$$\begin{cases} m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{T}_1 = -m_1\,\vec{g} \qquad \textit{em consequência} \quad \vec{T}_2 = -m_1\,g\,\vec{e}_{||} \\ \vec{a}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = -m_2\,\vec{g} - \vec{T}_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \vec{R}_{\perp} \equiv \vec{N} = -\left(m_1\,\vec{g}\right)_{\perp} \qquad \textit{em consequência} \quad \vec{N} = m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_{\perp} \\ \vec{R}_{||} \equiv \vec{F}_a = -\left(m_1\,\vec{g}\right)_{||} - \vec{T}_2 \quad \textit{em consequência} \quad \vec{F}_{a_e} = (-m_2\,g\,Sin[\theta] + m_1\,g)\,\vec{e}_{||} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\vec{F}_{a_e} = \mu_e\,|\vec{N}|\,\vec{e}_{||} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_e\,m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_{||} = (-m_2\,Sin[\theta] + m_1)\,g\,\vec{e}_{||} \tag{1.4}$$

$$m_1 = m_2(\mu_e\, Cos[\theta] + Sin[\theta]) \tag{1.5}$$

1- c) (3 val.)
Determine a expressão para a aceleração das massas em movimento quando m_2 for maior que o mínimo calculado anteriormente.

- Nota: Aqui há uma gralha: queria dizer "quando m_1 for maior que o mínimo calculado anteriormente". Nesse caso a massa m_1 sobe sempre e o sinal + deve ser tomado na definição de $\vec{F}_a$. Serão consideradas correctas respostas com m_1 a descer.

Em movimento $\vec{F}_a = \pm\mu_d\, |\vec{N}|\, \vec{e}_{||} = \pm\mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta]\, \vec{e}_{||}$. Por outro lado $a_2 = -a_1 = -a$

$$\begin{cases} m_1\, a = m_1\, g - T \\ -m_2\, a = m_2\, g\, Sin[\theta] - T \pm \mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta] \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{m_1 - m_2\left(Sin[\theta] \pm \mu_d\, Cos[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\, g \\ T = \frac{m_1\, m_2\, \left(1 + Sin[\theta] \pm \mu_d\, Cos[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\, g \end{cases} \tag{1.6}$$

1- d) (2 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa m_2 suba uma altura h.

Para um movimento uniformemente acelerado com aceleração a vertical partindo do repouso a equação de movimento é

$$y - y_o = -\frac{1}{2}\, a\, t^2 \implies t = \sqrt{\frac{2\,(y - y_o)}{a}} \tag{1.7}$$

Se a massa m_1 desce ℓ metros em Δt segundos, a massa m_2 sobe $h = \ell\, Sin[\theta]$ no mesmo tempo porque o fio é inextensível. Assim, para que m_2 suba h metros é necessário um tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\, h}{a\, Sin[\theta]}} \tag{1.8}$$

1- e) (2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo e o trabalho total sobre cada massa.

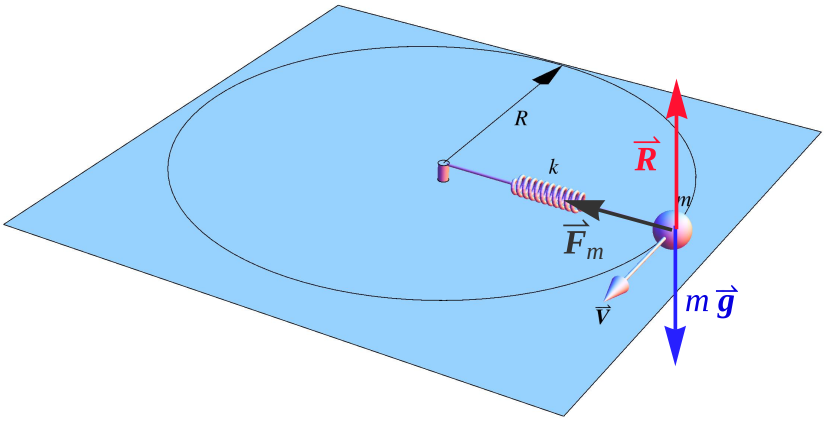
$$\begin{cases} W_{g_1} = m_1\, g\, h \\ W_{T_1} = -T\, h \end{cases} \implies W_{Tot_1} = (m_1\, g - T)\, h \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} W_{g_2} = -m_2\, g\, Sin[\theta]\, \frac{h}{Sin[\theta]} = -m_2\, g\, h \\ W_{T_2} = T\, \frac{h}{Sin[\theta]} \\ W_R = -\mu_d\, m_2\, g\, Cos[\theta]\, \frac{h}{Sin[\theta]} = -\mu_d\, m_2\, g\, Cot[\theta] \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\implies W_{Tot_2} = -(m_2\, g - T)\, h - \mu_d\, m_2\, g\, Cot[\theta]$$

2. Uma partícula de massa m desloca-se numa mesa horizontal sem atrito num movimento circular e uniforme de raio R e com velocidade $\vec{V}$. A partícula está ligada ao eixo de rotação através de uma mola de constante elástica k.

(1 val.)
Faça o diagrama de todas as forças que actuam sobre a massa m.



$$m\,\vec{a} = \vec{F}_m + m\,\vec{g} + \vec{R} \quad ; \quad \begin{cases} \vec{R} = -m\,\vec{g} \\ \vec{F}_m = -k\,(R-\ell_o)\,\vec{e}_r \end{cases} \tag{2.11}$$

2- b) (2 val.)
Se o raio da trajectória R fôr o dobro do comprimento natural da mola ℓ_o, qual é a velocidade $\vec{V}$ do comboio?

- NB: Aqui e subsequentemente "comboio" refere-se óbviamente à partícula de massa m.

$$m\,\vec{a} = -k(R-\ell_o)\,\vec{e}_r \quad \Longrightarrow \quad m\,\frac{V^2}{R} = k(R-\ell_o) \tag{2.12}$$

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\sqrt{(R-\ell_o)\,R} = \omega_o\,\sqrt{R(R-\ell_o)} = \sqrt{2}\,\omega_o\,\ell_o \qquad onde\ \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.13}$$

2- c) (2 val.)
Determine o tempo T que o comboio leva a fazer uma volta completa. Qual é a velocidade angular $\vec{\omega}$ e como se relaciona com $\vec{V}$?

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi\,R}{V} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\,\pi}{\omega_o}\,\sqrt{\frac{R}{R-\ell_o}} \tag{2.14}$$

$$\vec{\omega} = \frac{2\,\pi}{T}\,\vec{e}_z = \frac{V}{R}\,\vec{e}_z = \omega_o\,\sqrt{\frac{R-\ell_o}{R}}\;\vec{e}_z \tag{2.15}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \left(R\,\vec{e}_r\right) \tag{2.16}$$

2- d) (3 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante uma volta e a energia mecânica do sistema.

$$W_g = W_R = W_m = 0 \quad porque\ \ m\,\vec{g}\,,\ \vec{R}\ \text{e}\ \vec{F}_m\ são\ sempre\ ortogonais\ a\ d\vec{r}. \tag{2.17}$$

$$EC = \frac{1}{2}\, m\, V^2 \qquad EP = \frac{1}{2}\, k (R - \ell_o)^2 = \frac{1}{2}\, \frac{m^2\, V^4}{k\, R^2} \tag{2.18}$$

2- e) (2 val.)
Se o fio que liga a massa à mola se partir ao fim de Δt segundos, qual é a trajectória descrita pela massa *m* depois.

Segue uma trajectória rectilínea, tangente à circunferência no ponto de rotura, com velocidade constante dada por $\vec{\boldsymbol{V}} = V\, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta\left[\frac{V}{R}\, \Delta t\right]$.