1º Teste de Mecânica e Ondas

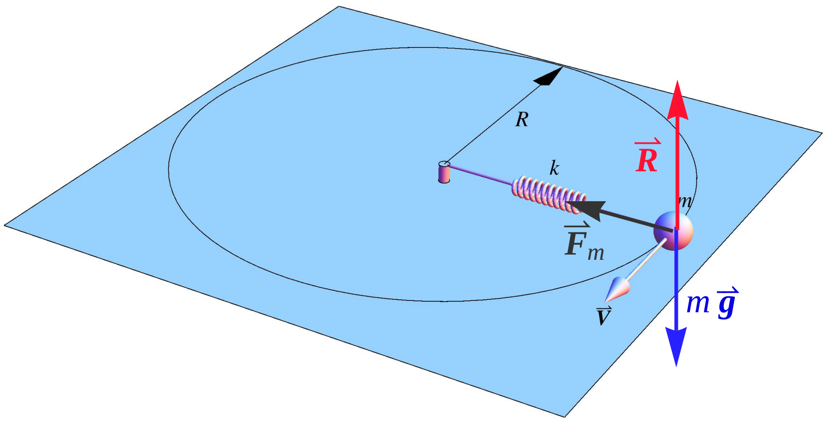
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Seg 16:30 - 17:30 –Q4.2/4.4
12 de Abril 2010

(Teste a)

1. Uma partícula de massa m desloca-se numa mesa horizontal sem atrito num movimento circular e uniforme de raio R e com velocidade $\vec{V}$. A partícula está ligada ao eixo de rotação através de uma mola de constante elástica k.

1- a) (1 val.)
Faça o diagrama de todas as forças que actuam sobre a massa m.



$$m\,\vec{a} = \vec{F}_m + m\,\vec{g} + \vec{R} \quad ; \quad \begin{cases} \vec{R} = -m\,\vec{g} \\ \vec{F}_m = -k\,(R-\ell_o)\,\vec{e}_r \end{cases} \tag{1.1}$$

1- b) (3 val.)
Determine a deformação da mola para que este movimento seja possível.

$$m\,\vec{g} + \vec{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{a} \equiv -m\,\frac{V^2}{R}\,\vec{e}_r = \vec{F}_m \tag{1.2}$$

$$\frac{m\,V^2}{R} = k(R-\ell_o) \quad \Longrightarrow \quad (R-\ell_o) = \frac{m\,V^2}{k\,R} \tag{1.3}$$

1- c) (1 val.)
Determine a frequência angular f do movimento e a aceleração angular $\dot{\omega}$.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{2\pi R} \quad ; \quad \dot{\omega} = 0 \tag{1.4}$$

(3 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante uma volta e a energia mecânica do sistema.

$$W_g = W_R = W_m = 0 \;\; porque \;\; m\vec{g}\,,\; \vec{R} \;\; e\; \vec{F}_m \; são \; sempre \; ortogonais \; a \; d\vec{r}. \tag{1.5}$$

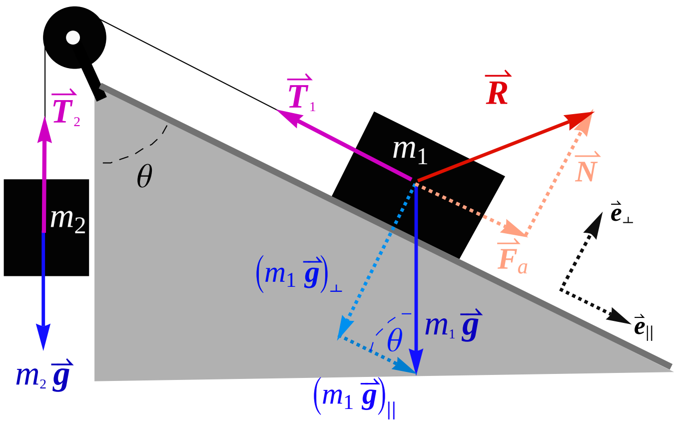
$$EC = \frac{1}{2}\, m\, V^2 \qquad EP = \frac{1}{2}\, k(R-\ell_o)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m^2\, V^4}{k\, R^2} \tag{1.6}$$

1- e) (2 val.)
Se o fio que liga a massa à mola se partir ao fim de Δt segundos, qual é a trajectória descrita pela massa *m* depois.

Segue uma trajectória rectilínea, tangente à circunferência no ponto de rotura, com velocidade constante dada por $\vec{V} = V\, \vec{e}_\theta[\frac{V}{R}\,\Delta t]$.

---

2. Uma massa m_1 está posicionada numa superfície com atrito e pode-se ligar por um fio inextensível de massa desprezável a uma massa m_2, pendurada sem contacto com a parede como indica a figura. Designe o coeficiente de atrito estático da rampa por μ_e e o coeficiente de atrito dinâmico por μ_d. Assuma que a inclinação θ da rampa não é suficiente para a massa m_1 se começar a movimentar quando livre.



2- a) (1 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento.

- Em movimento

$$\begin{cases} m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{T}_2 \\ m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

- Em equilíbrio

$$\begin{cases} \vec{a}_2 = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; \vec{T}_2 = -m_2\,\vec{g} \qquad \Leftrightarrow \;\; \vec{T}_1 = -m_2\, g\, \vec{e}_{||} \\ \vec{a}_1 = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; \vec{R} = -m_1\,\vec{g} - \vec{T}_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

2- b) (2 val.)
Determine a massa m_2 mínima para que a massa m_1 se comece a deslocar para cima.

$$\begin{cases} \vec{R}_\perp \equiv \vec{N} = -\left(m_1\,\vec{g}\right)_\perp & \Leftrightarrow \quad \vec{N} = m_1\,g\,Sin[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ \vec{R}_{||} \equiv \vec{F}_a = -\left(m_1\,\vec{g}\right)_{||} - \vec{T}_1 & \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{a_e} = (-m_1\,g\,Cos[\theta] + m_2\,g)\,\vec{e}_{||} \end{cases} \tag{2.9}$$

A força de atrito estático máxima sendo no limite $\vec{F}_{a_e} = \mu_e\,|\vec{N}|\,\vec{e}_{||}$, a massa m_2 tem que ser tal que se esteja no limite de validade da equação

$$\vec{F}_{ae} = \mu_e\,|\vec{N}|\,\vec{e}_{||} = -\left(m_1\,\vec{g}\right)_{||} - \vec{T}_1 \tag{2.10}$$

$$\mu_e\,m_1\,g\,Sin[\theta] = -m_1\,g\,Cos[\theta] + m_2\,g \tag{2.11}$$

$$m_2 = m_1(\mu_e\,Sin[\theta] + Cos[\theta]) \tag{2.12}$$

2- c) (3 val.)
Determine a expressão para a aceleração das massas em movimento quando m_2 for maior que o mínimo calculado anteriormente.

$$\begin{cases} -m_1\,a = m_1\,g\,Cos[\theta] - T + \mu_d\,m_1\,g\,Sin[\theta] \\ m_2\,a = m_2\,g - T \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{m_2 - m_1\left(Cos[\theta] + \mu_d\,Sin[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\,g \tag{2.13}$$

2- d) (2 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa m_1 suba uma altura h.

Para a massa m_2 num movimento uniformemente acelerado com aceleração a vertical partindo do repouso a equação de movimento é

$$y - y_o = -\frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,(y - y_o)}{a}} \tag{2.14}$$

Se a massa m_2 desce ℓ metros em Δt segundos, a massa m_1 sobe $h = \ell\,Cos[\theta]$ no mesmo tempo porque o fio é inextensível. Assim, para que m_1 suba h metros é necessário um tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\,h}{a\,Cos[\theta]}} \tag{2.15}$$

2- e) (2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo e o trabalho total sobre cada massa.

$$\begin{cases} W_{g_2} = m_2\,g\,h \\ W_{T_2} = -T\,h \end{cases} \Longrightarrow \quad W_{tot_2} = (m_2\,g\ - T)\,h \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} W_{g_1} = -m_1\,g\,Cos[\theta]\,\dfrac{h}{Cos[\theta]} = -m_1\,g\,h \\ W_{T_1} = T\,\dfrac{h}{Cos[\theta]} \\ W_R = -\mu_d\,m_1\,g\,Sin[\theta]\,\dfrac{h}{Cos[\theta]} = -\mu_d\,m_1\,g\,Tan[\theta] \end{cases} \Longrightarrow \quad W_{tot_1} = \tag{2.17}$$

$$-(m_1\,g - T)\,h - \mu_d\,m_1\,g\,Tan[\theta]$$