1º Teste de Mecânica e Ondas

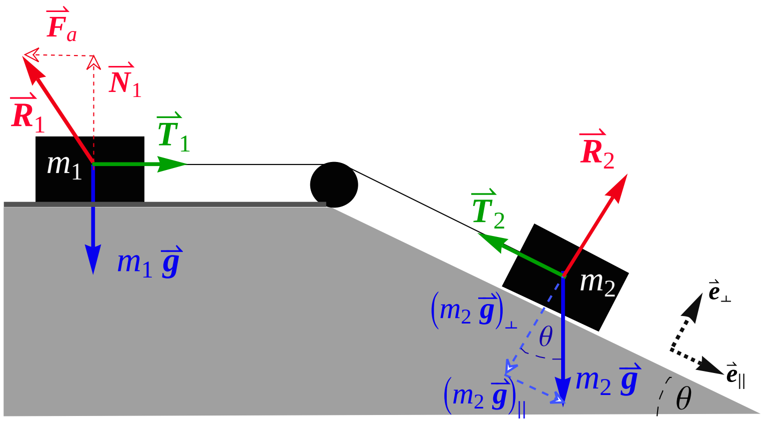
(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Seg 15:00 - 16:00 - Q4.6
12 de Abril 2010

(Teste b)

1. Um sistema de duas massas m_1 e m_2 ligadas por um fio inextensível de massa desprezável está posicionado sobre uma superfície como indica a figura. O coeficiente de atrito estático da plataforma horizontal é μ_e e o coeficiente de atrito dinâmico é μ_d. A rampa não tem atrito.

1- a) (1 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento. Determine a magnitude das forças envolvidas.



- Como o fio tem massa desprezável a tensão $T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ é constante.
- Em equilíbrio

Dado que na rampa não há atrito

$$\begin{cases} 0 = m_1\,\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 \quad e \quad \vec{R}_1 \equiv \vec{N}_1 + \vec{F}_a & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_1 = -m_1\,\vec{g} \\ \vec{T}_1 = -\vec{F}_a = m_2\,g\,Sin[\theta]\,\vec{e}_x \end{cases} \\ 0 = m_2\,\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 \quad e \quad \vec{R}_2 \equiv \vec{N}_2 & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_2 = -(m_2\,\vec{g})_\perp = m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ \vec{T}_2 = -(m_2\,\vec{g})_{||} = -m_2\,g\,Sin[\theta]\,\vec{e}_{||} \end{cases} \end{cases} \tag{1.1}$$

- Em movimento

$$\begin{cases} m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 \quad e \quad \vec{R}_1 \equiv \vec{N}_1 + \vec{F}_a & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_1 = -m_1\,\vec{g} \\ m_1\,\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{F}_a \end{cases} \\ m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 \quad e \quad \vec{R}_2 \equiv \vec{N}_2 & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_2 = -(m_2\,\vec{g})_\perp = m_2\,g\,Cos[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ m_2\,\vec{a}_2 = (m_2\,\vec{g})_{||} + \vec{T}_2 \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

(2 val.)
Determine o ângulo θ_c da rampa a partir do qual o sistema se começa a deslocar.

O valor de $\vec{\boldsymbol{F}}_a$ na inclinação $\theta = \theta_c$ em que o sistema começa a andar espontâneamente é por definição o valor máximo da força de atrito estático e é então igual a $-\mu_e\, |\vec{\boldsymbol{N}}_1|\, \vec{\boldsymbol{e}}_x = -\mu_e\, m_1\, g\, \vec{\boldsymbol{e}}_x$. Neste caso limite de equilíbrio

$$\vec{\boldsymbol{T}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_2\, g\, Sin[\theta_c]\; - \mu_e\, m_1\, g\; = 0 \tag{1.3}$$

$$\theta_c = ArcSin\left[\mu_e\, \frac{m_1}{m_2}\right] \tag{1.4}$$

1- c) (3 val.)
Determine a expressão para a aceleração de cada massa e a tensão no fio quando a inclinação for suficiente para o sistema se deslocar.

- Como o fio é inextensível podemos escrever $a_1 = a_2 = a$.

$$\begin{cases} m_1\, a = T - \mu_d\, m_1\, g \\ m_2\, a = m_2\, g\, Sin[\theta] - T \end{cases} \tag{1.5}$$

Somando as duas equações (some as expressões do mesmo lado da igualdade) obtemos

$$(m_1 + m_2)\, a = g\, m_2\, sin(\theta) - \;\mu_d\, g\, m_1 \qquad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{m_2\, sin(\theta) - \mu_d\, m_1}{m_1 + m_2}\right) g \tag{1.6}$$

$$T = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\left(\mu_d + sin(\theta)\right) g \tag{1.7}$$

1- d) (2 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa m_2 desça uma altura h.

Como a massa m_2 percorre uma distância d no plano inclinado num movimento uniformemente acelerado com aceleração a, partindo do repouso, e a altura $h = d\, Sin[\theta]$, obtém-se

$$d = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2\, d}{a}} = \sqrt{\frac{2\, h}{a\, Sin[\theta]}} \tag{1.8}$$

1- e) (2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo e o trabalho total sobre cada massa.

- Da definição de trabalho $\int_d \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ conclui-se que

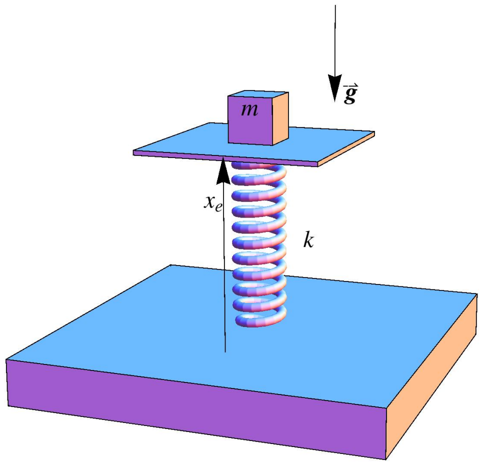
$$\begin{cases} W_{\;m_1 g} = 0 & \left(porque\;\; m_1\, \vec{\boldsymbol{g}} \perp d\vec{\mathbf{r}}\right) \\ W_{\;R_1} = -\mu_d\, m_1\, g\, d & \left(porque\, \vec{\boldsymbol{R}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\boldsymbol{F}}_a \cdot d\vec{\mathbf{r}}\right) \\ W_{\;T_1} = T\, d & \left(porque\, m_1\;\, percorre\, a\;\, mesma\, distância\, d = \frac{h}{sin(\theta)}\right) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad W_1 = \tag{1.9}$$

$$\left(T - \mu_d\, m_1\, g\right) \frac{h}{sin(\theta)}$$

$$\begin{cases} W_{m_2 g} = m_2\, g\, sin(\theta)\, d & \Leftrightarrow \quad W_{m_2 g} = m_2\, g\; h \\ W_{R_2} = 0 & \left(porque\ \vec{\boldsymbol{R}}_2 \perp d\vec{\mathbf{r}}\right) \\ W_{T_2} = -T\, d & \Leftrightarrow \quad W_{2_{T_2}} = -T\, \dfrac{h}{sin(\theta)} \end{cases} \Longrightarrow W_2 = m_2\, g\, h\, -\, T\, \frac{h}{sin(\theta)} \tag{1.10}$$

$$W_{tot} = W_1 + W_2 = m_2\, g\, h\, - \mu_d\, m_1\, g\, \frac{h}{sin(\theta)} \tag{1.11}$$

2. Um pequeno objecto de massa m cai de uma altura h numa plataforma de massa desprezável, suportada por uma mola vertical de constante elástica k. Supondo que o comprimento natural da mola é ℓ_o e tudo se passa no campo gravítico com aceleração $\vec{\boldsymbol{g}}$:



2- a) (2 val.)
Determine a deformação máxima da mola (relativamente ao comprimento natural ℓ_o) na posição x_f em que a massa pára.

Quando a massa cai da altura h acima a plataforma, que está na posição $x = \ell_o$, a sua posição é $x_i = h + \ell_o$.

No ponto em que a massa pára só existe energia potencial gravítica e da mola. Se pusermos $U_g(\ell_o) = 0$ então $U_g(x) = mg(x - \ell_o)$ e por conservação de energia mecânica

$$U_g(x_i) = U_g(x_f) + U_m(x_f) \tag{2.12}$$

$$m\, g\;\, h = m\, g\left(x_f - \ell_o\right) + \frac{1}{2}\, k\left(x_f - \ell_o\right)^2 \Longrightarrow x_f = \ell_o - \frac{m\, g}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\, k\, h}{m\, g}}\right) \tag{2.13}$$

2- b) (2 val.)
No movimento que se segue a massa m descola da plataforma? Qual a deformação da mola no instante em que isso acontece? (Justifique a sua resposta).

- Sim, porque ao passar outra vez pela posição $x = \ell_o$ a desaceleração da plataforma é maior do que a da massa por efeito da força da mola na plataforma, que passa a apontar no sentido de $\vec{\boldsymbol{g}}$.

(3 val.)
Qual é a deformação de equilíbrio do sistema massa e mola? Se comprimir o sistema de forma a aumentar a deformação no equilíbrio $(x_e - \ell_o)$ por um factor de 3 e depois largar, qual a altura máxima h que a massa m atinge acima da sua posição de equilíbrio x_e?

$$-m\,g = -k\,(x_e - \ell_o) \quad \Rightarrow \quad x_e = \ell_o - \frac{m\,g}{k} \tag{2.14}$$

Deformação inicial

$$\Delta x_o = (x_o - \ell_o) = 3\,(x_e - \ell_o) = -3\,\frac{mg}{k} \tag{2.15}$$

Energia potencial do sistema assumindo que $U_g(\ell_o) = 0$

$$U(x) = U_m(x) + U_g(x) = \frac{1}{2}\,k(x - \ell_o)^2 + mg(x - \ell_o) \tag{2.16}$$

Energia mecânica inicial

$$E_o = \frac{1}{2}\,k\,\Delta x_o{}^2 + mg\,\Delta x_o = \frac{1}{2}\,k\left(-3\,\frac{mg}{k}\right)^2 - 3\,\frac{m^2\,g^2}{k} = \frac{3}{2}\,\frac{m^2\,g^2}{k} \tag{2.17}$$

Energia mecânica final

$$E_h = mg\,(h + x_e - \ell_o) = mgh\; - \frac{m^2\,g^2}{k} \tag{2.18}$$

Conservação da energia

$$E_o = E_h \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3}{2}\,\frac{m^2\,g^2}{k} = mgh\; - \frac{m^2\,g^2}{k} \qquad \therefore \quad h = \frac{5}{2}\,\frac{mg}{k} \tag{2.19}$$

2- d) (3 val.)
Calcule explícitamente o trabalho realizado pelas diferentes forças que actuam em m durante todo o movimento.

Trabalho da mola

$$W_m = \int_{x_o\,\ell_o} \vec{\boldsymbol{F}}_m(x)\cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{x_o}^{\ell_o} k(x - \ell_o)\,dx = \frac{1}{2}\,k(x_o - \ell_o)^2 = \frac{9}{2}\,\frac{m^2\,g^2}{k} \tag{2.20}$$

Trabalho do campo gravítico

$$W_g = \int_{x_o\,x_f} \vec{\boldsymbol{F}}_g\cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{x_o}^{h+x_e} mg\,dx = -mg(h + x_e - x_o) = -mg(h + (x_e - \ell_o) - (x_o - \ell_o)) \tag{2.21}$$

$$W_g = -\left(\frac{5}{2}\,\frac{m^2\,g^2}{k} - \frac{m^2\,g^2}{k} + 3\,\frac{m^2\,g^2}{k}\right) = -\frac{9}{2}\,\frac{m^2\,g^2}{k} \tag{2.22}$$

