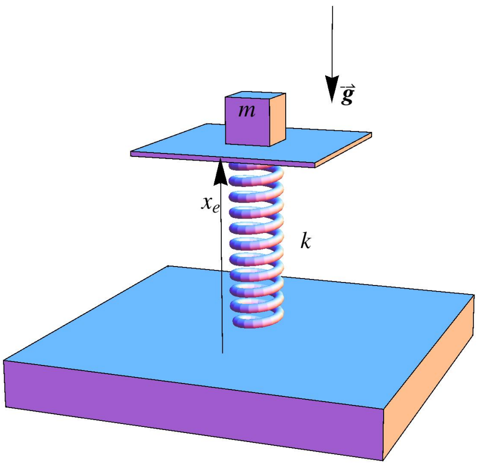
# 1º Teste de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Seg 15:00 - 16:00 - Q4.6
12 de Abril 2010

(Teste a)

**1.** Um pequeno objecto de massa $m$ repousa numa plataforma de massa desprezável, suportada por uma mola vertical de constante elástica $k$. Supondo que o comprimento natural da mola é $\ell_o$ e tudo se passa no campo gravítico com aceleração $\vec{g}$:




**1- a)** (2 val.)
Determine a deformação da mola na posição $x_e$ em que o sistema está em equilíbrio.

Força da mola

$$\vec{F}_m = -k(x - \ell_o)\,\vec{e}_x \tag{1.1}$$

Força gravítica

$$\vec{F}_g = -mg\,\vec{e}_x \tag{1.2}$$

No equilíbrio

$$\vec{F}_m + \vec{F}_g = 0 \quad\Longrightarrow\quad (x_e - \ell_o) = -\frac{mg}{k} \tag{1.3}$$

**1- b)** (2 val.)
Em que condições é que a massa $m$ descola da plataforma? Qual a deformação da mola no instante em que isso acontece? (Justifique a sua resposta).

A massa descola da plataforma se no seu movimento passar por $x = \ell_o$, o comprimento natural da mola. A partir deste ponto a desaceleração da plataforma é maior do que $g$ porque a mola a ela ligada exerce uma força $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ no mesmo sentido que $\vec{\boldsymbol{g}}$, equanto a massa $m$ apenas é desacelerada por $\vec{\boldsymbol{g}}$.

**1- c)** (3 val.)
Se comprimir o sistema de forma a aumentar a deformação inicial por um factor de 4 e depois largar, qual a altura máxima $h$ que a massa $m$ atinge acima da sua posição de equilíbrio $x_e$?

Deformação inicial

$$\Delta x_o = (x_o - \ell_o) = 4\,(x_e - \ell_o) = -4\,\frac{mg}{k} \tag{1.4}$$

Energia potencial do sistema assumindo que $U_g(\ell_o) = 0$

$$U(x) = U_m(x) + U_g(x) = \frac{1}{2}\,k(x - \ell_o)^2 + mg(x - \ell_o) \tag{1.5}$$

Energia mecânica inicial

$$E_o = \frac{1}{2}\,k\,\Delta x_o{}^2 + mg\,\Delta x_o = \frac{1}{2}\,k\left(-4\,\frac{mg}{k}\right)^2 - 4\,\frac{m^2\,g^2}{k} = 4\,\frac{m^2\,g^2}{k} \tag{1.6}$$

Energia mecânica final

$$E_h = mg\,(h + x_e - \ell_o) = mgh\, - \frac{m^2\,g^2}{k} \tag{1.7}$$

Conservação da energia

$$E_o = E_h \qquad \Longrightarrow \qquad 4\,\frac{m^2\,g^2}{k} = mgh\, - \frac{m^2\,g^2}{k} \qquad \therefore \qquad h = 5\,\frac{mg}{k} \tag{1.8}$$

- Solução alternativa: Movimento livre dum grave atirado com velocidade inicial $v_i$ quando passa $x = \ell_o$.

Energia quando a massa descola da plataforma ($x = \ell_o$)

$$E_i = \frac{1}{2}\,m\,v_i^2 = 4\,\frac{m^2\,g^2}{k} \qquad \therefore \qquad v_i = g\sqrt{8\,\frac{m}{k}} \tag{1.9}$$

No ponto de altura máxima $x = h + x_e$ a velocidade vertical é nula, pelo que nesse instante $t_h$ as equações da velocidade e trajectória permitem concluir que

$$0 = v_i - g\,t_h \qquad \Longrightarrow \qquad t_h = \frac{v_i}{g} = \sqrt{8\,\frac{m}{k}} \tag{1.10}$$

$$h + x_e - \ell_o = v_i\,t_h - \frac{1}{2}\,g\,t_h^2 \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{mg}{k} + 8\,\frac{mg}{k} - \frac{1}{2}\,8\,\frac{mg}{k} = 5\,\frac{mg}{k} \tag{1.11}$$

**1- d)** (3 val.)
Calcule explícitamente o trabalho realizado pelas diferentes forças que actuam em $m$ durante todo o movimento.

Trabalho da mola

$$W_m = \int_{x_o\,\ell_o} \vec{F}_m(x)\cdot d\vec{r} = -\int_{x_o}^{\ell_o} k(x-\ell_o)\,dx = \frac{1}{2}k(x_o-\ell_o)^2 = 8\,\frac{m^2 g^2}{k} \tag{1.12}$$

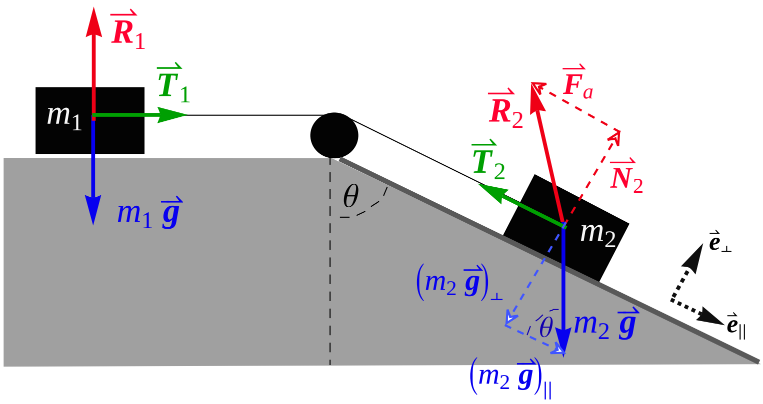
Trabalho do campo gravítico

$$W_g = \int_{x_o\,x_f} \vec{F}_g\cdot d\vec{r} = -\int_{x_o}^{h+x_e} mg\,dx = -mg(h+x_e-x_o) = -mg(h+(x_e-\ell_o)-(x_o-\ell_o)) \tag{1.13}$$

$$W_g = -\left(5\,\frac{m^2 g^2}{k} - \frac{m^2 g^2}{k} + 4\,\frac{m^2 g^2}{k}\right) = -8\,\frac{m^2 g^2}{k} \tag{1.14}$$

**2.** Um sistema de duas massas $m_1$ e $m_2$ ligadas por um fio inextensível de massa desprezável está posicionado sobre uma superfície como indica a figura. O coeficiente de atrito estático da rampa é $\mu_e$ e o coeficiente de atrito dinâmico é $\mu_d$. A superfície horizontal não tem atrito.

**2- a)** (1 val.)
Faça o diagrama de forças que actuam sobre cada massa quando o sistema se encontra em equilíbrio e em movimento. Determine a magnitude das forças envolvidas.




- Como o fio tem massa desprezável a tensão $T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ é constante.
- Em equilíbrio

Dado que na superfície horizontal não há atrito

$$\begin{cases} 0 = m_1\,\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 \quad e \quad \vec{R}_1 \equiv \vec{N}_1 & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_1 = -m_1\,\vec{g} \\ \vec{T}_1 = 0 \\ \vec{T}_2 = 0 \end{cases} \\ 0 = m_2\,\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 \quad e \quad \vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{F}_a & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_2 = -(m_2\,\vec{g})_\perp = m_2\,g\,Sin[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ \vec{F}_a = -(m_2\,\vec{g})_{||} \end{cases} \end{cases} \tag{2.15}$$

- Em movimento

$$\begin{cases} m_1\,\vec{a}_1 = m_1\,\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 \quad e \quad \vec{R}_1 \equiv \vec{N}_1 & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_1 = -m_1\,\vec{g} \\ m_1\,\vec{a}_1 = \vec{T}_1 \end{cases} \\ m_2\,\vec{a}_2 = m_2\,\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 \quad e \quad \vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{F}_a & \Rightarrow \begin{cases} \vec{N}_2 = -\left(m_2\,\vec{g}\right)_\perp = m_2\,g\,Sin[\theta]\,\vec{e}_\perp \\ m_2\,\vec{a}_2 = \left(m_2\,\vec{g}\right)_{||} + \vec{F}_a + \vec{T}_2 \end{cases} \end{cases} \tag{2.16}$$

**2- b)** (2 val.)
Determine o ângulo $\theta_c$ da rampa a partir do qual o sistema se começa a deslocar.

O valor de $\vec{F}_a$ na inclinação $\theta = \theta_c$ em que o sistema começa a andar espontâneamente é por definição o valor máximo da força de atrito estático e é então igual a $-\mu_e\,|\vec{N}_2|\,\vec{e}_{||} = -\mu_e\,m_2\,g\,Sin[\theta_c]\,\vec{e}_{||}$. Como em repouso $T = 0$, temos neste caso limite de equilíbrio

$$\vec{F}_a = -\left(m_2\,\vec{g}\right)_{||} \quad \Leftrightarrow \quad -\mu_e\,m_2\,g\,Sin[\theta_c] = -m_2\,g\,Cos[\theta_c] \tag{2.17}$$

$$\theta_c = ArcTan\left[\frac{1}{\mu_e}\right] \tag{2.18}$$

**2- c)** (3 val.)
Determine a expressão para a aceleração de cada massa e a tensão no fio quando a inclinação for suficiente para o sistema se deslocar.

- Como o fio é inextensível podemos escrever $a_1 = a_2 = a$ .

Em movimento a componente paralela da reacção $\vec{R}_2$ é a força de atrito dinâmica sobre $m_2$, que é constante e igual a $\vec{F}_a = -\mu_d\,|\vec{N}_2|\,\vec{e}_{||}$. As equações de movimento são

$$\begin{cases} m_1\,a = T \\ m_2\,a = m_2\,g\,Cos[\theta] - \mu_d\,m_2\,g\,Sin[\theta] - T \end{cases} \tag{2.19}$$

Somando as duas equações (some as expressões do mesmo lado da igualdade) obtemos

$$(m_1 + m_2)\,a = m_2\,g\left(Cos[\theta] - \mu_d\,Sin[\theta]\right) \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{m_2\left(Cos[\theta] - \mu_d\,Sin[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\,g \tag{2.20}$$

Da primeira equação sai logo que

$$T = m_1\,a = \frac{m_1\,m_2\left(Cos[\theta] - \mu_d\,Sin[\theta]\right)}{(m_1 + m_2)}\,g \tag{2.21}$$

**2- d)** (2 val.)
Determine quanto tempo é necessário para que a massa $m_2$ desça uma altura $h$.

Como a massa $m_2$ percorre uma distância $d$ no plano inclinado num movimento uniformemente acelerado com aceleração $a$, partindo do repouso, e a altura $h = d\,cos(\theta)$, obtém-se

$$d = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2\,d}{a}} = \sqrt{\frac{2\,h}{a\,cos(\theta)}} \tag{2.22}$$

(2 val.)
Determine o trabalho realizado por cada força durante esse processo e o trabalho total sobre cada massa.

- Da definição de trabalho $\int_d \vec{F} \cdot d\vec{r}$ conclui-se que

$$\begin{cases} W_{m_1 g} = 0 & \left(porque\ m_1 \vec{g} \perp d\vec{r}\right) \\ W_{R_1} = 0 & \left(porque\ \vec{R}_1 \perp d\vec{r}\right) \\ W_{T_1} = T \dfrac{h}{cos(\theta)} & \left(porque\ m_1\ percorre\ a\ mesma\ distância\ d = \dfrac{h}{cos[\theta]}\right) \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\Longrightarrow \quad W_1 = T \frac{h}{cos(\theta)}$$

$$\begin{cases} W_{m_2 g} = m_2\, g\, cos(\theta)\, d & \Leftrightarrow \quad W_{m_2 g} = m_2\, g\ h \\ W_{R_2} = -\mu_d\, m_2\, g\, sin(\theta)\, d & \Leftrightarrow \quad W_{R_2} = -\mu_d\, m_2\, g\, tan(\theta)\, h \\ W_{T_2} = -T\, d & \Leftrightarrow \quad W_{T_2} = -T \dfrac{h}{cos(\theta)} \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\Longrightarrow W_2 = m_2\, g\, h \left(1 - \mu_d\, Tan[\theta]\right) - T \frac{h}{cos(\theta)}$$

$$W_{tot} = W_1 + W_2 = m_2\, g\, h \left(1 - \mu_d\, tan(\theta)\right) \tag{2.25}$$