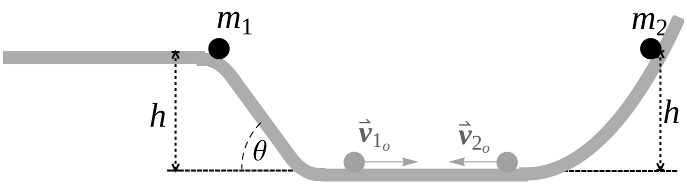
2º Exame de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Quarta-feira 14 de Julho 2010
09:00 - 11:30

1. Duas massas m_1 e m_2 são largadas de repouso de uma altura h em rampas diferentes que vão dar à mesma superfície plana com ilustrado na figura. Considere que as massas colidem frontalmente no plano horizontal.



1- a) (1 val.) Determine as velocidades das massas m_1 e m_2 quando chegam ao plano horizontal.

- Por conservação da energia mecânica a energia potencial gravítica converte-se em energia cinética:

$$m_i\, g\, h = \frac{1}{2}\, m_i\, v_{i_o}^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{\boldsymbol{v}}_{1o} &= \sqrt{2\, g\, h}\;\vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{v}}_{2o} &= -\sqrt{2\, g\, h}\;\vec{\boldsymbol{e}}_x \end{cases} \tag{1.1}$$

1- b) (2 val.) Assumindo que a colisão é completamente inelástica, determine a velocidade final das massas e a variação de energia na colisão. Existe algum valor de $\frac{m_1}{m_2}$ para o qual as massas conseguem escapar para a plataforma horizontal de onde m_1 parte? Justifique a sua resposta.

- Na colisão há conservação do momento linear apenas, e as massas seguem com a mesma velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_f$.

$$m_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_{1o} + m_2\,\vec{\boldsymbol{v}}_{2o} = (m_1 + m_2)\,\vec{\boldsymbol{v}}_f \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_f = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\,\sqrt{2\, g\, h}\;\vec{\boldsymbol{e}}_x \tag{1.2}$$

- Antes da colisão a energia total é igual à soma das energias potenciais gravíticas iniciais. Depois da colisão a energia total é igual à energia cinética das duas massas.

$$EC_i = \frac{1}{2}\, m_1\, v_{1_o}^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_{2_o}^2 = (m_1 + m_2)\, g\, h \qquad ; \qquad EC_f = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v_f^2 = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}\, g\, h \tag{1.3}$$

$$\Delta\mathcal{E} = EC_f - EC_i = \frac{(m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)}\, g\, h = -\frac{4\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, g\, h < 0 \tag{1.4}$$

- Quaisquer que sejam as massas m_1 e m_2, a energia mecânica depois da colisão é sempre inferior à energia mínima $(m_1 + m_2)\, g\, h$ necessária para que as massas pudessem subir a rampa porque

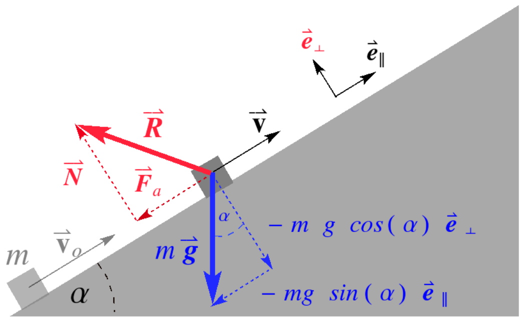
$$EC_f = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}\, g\, h = (m_1 + m_2)\,\frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)^2}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)^2}\, g\, h \;<\; (m_1 + m_2)\, g\, h.$$

1- c) (2 val.) Assumindo agora que as colisões são completamente elásticas, quais são as velocidades das massas após a colisão de m_1 com $m_2 = 2\, m_1$. (Sugestão: lembre-se da fórmula $\left(a^2 - b^2\right) \equiv (a - b)\,(a + b)$ para converter o sistema a equações lineares!)

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_{1o} - \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{2o}) \\ m_1(\vec{v}_{1o} - \vec{v}_1)\cdot(\vec{v}_{1o} + \vec{v}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{2o})\cdot(\vec{v}_2 + \vec{v}_{2o}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{1o} - \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1}(\vec{v}_2 - \vec{v}_{2o}) \\ \vec{v}_{1o} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{2o} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{v}_{1o} + \frac{2\,m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2o} = \frac{(m_1-3\,m_2)}{m_1+m_2}\vec{v}_{1o} \\ \vec{v}_2 = \frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1o} - \frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{v}_{2o} = -\frac{(3\,m_1-m_2)}{m_1+m_2}\vec{v}_{2o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = -(\vec{v}_1)_o \quad \vec{v}_1 = -\frac{5}{3}(\vec{v}_1)_o \\ \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2)_o \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{3}(\vec{v}_2)_o \end{cases} \tag{1.6}$$

2. Um objecto de massa m é disparado com velocidade $\vec{\mathbf{v}}_o$ numa rampa com inclinação α. Considere que há atrito na rampa, com coeficiente de atrito dinâmico μ.



2- a) (2 val.) Escreva a equação para a distância percorrida pela massa sobre a rampa em função do tempo. Determine a altura máxima h que a massa atinge ao subir a rampa e o tempo que leva a chegar aí em função do ângulo α.

- A força de atrito dinâmica é $\vec{F}_a = -\mu\,|\vec{N}|\,\frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}$, onde a componente normal da reacção é $\vec{N} = m\,g\,cos(\alpha)\,\vec{e}_\perp$, pelo que a subir ao longo da rampa $\vec{r}(t) = s(t)\,\vec{e}_\parallel$ é consequência da equação de movimento uniformemente (des)acelerado com velocidade inicial $\vec{v}_o = v_o\,\vec{e}_\parallel$.

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2} = -mg\,sin(\alpha)\,\vec{e}_\parallel - \mu\,m\,g\,cos(\alpha)\,\vec{e}_\parallel \quad \Rightarrow \quad s(t) = v_o\,t - \frac{1}{2}\,g\,(sin(\alpha) + \mu\,cos(\alpha))\,t^2 \tag{2.7}$$

- A distância máxima é atingida quando a massa pára, i.e. a velocidade é nula. Isso acontece ao fim de um tempo t_{max}:

$$s'(t_{max}) = v_o - g\,(sin(\alpha) + \mu\,cos(\alpha))\,t_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_o}{g\,(sin(\alpha) + \mu\,cos(\alpha))} \tag{2.8}$$

$$s(t_{max}) = \frac{v_o^2}{2\,g\,(sin(\alpha) + \mu\,cos(\alpha))} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{v_o^2\,sin(\alpha)}{2\,g\,(sin(\alpha) + \mu\,cos(\alpha))} \tag{2.9}$$

2- b) (2 val.) Qual é o ângulo α_{max} para o qual a distância percorrida sobre a rampa é máxima? E qual é o ângulo α para o qual a altura atingida é máxima? Justifique as suas respostas.

- A distância percorrida $s(t_{max})$ é máxima se $(\sin(\alpha) + \mu\,\cos(\alpha))$ for mínimo, o que significa

$$(sin(\alpha)+\mu\,cos(\alpha)) = \sqrt{1+\mu^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\,sin(\alpha) + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,cos(\alpha)\right) = \sqrt{1+\mu^2}\ sin(\alpha+\phi) \tag{2.10}$$

onde $\phi = tan^{-1}(\mu)$. Para $\mu < 1$ tem-se $\phi < \frac{\pi}{4}$, pelo que $sin(0+\phi) < sin(\alpha+\phi)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ou seja o mínimo de $sin(\alpha+\phi)$ ocorre para $\alpha_{max} = 0$. Quando $\mu > 1$, tem-se $\phi > \frac{\pi}{4}$ e neste caso $sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) < sin(\alpha+\phi)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e o mínimo de $sin(\alpha+\phi)$ ocorre para $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$.

- A altura máxima é sempre atingida para $\alpha = \pi/2$ qualquer que seja o μ porque $h_{max} = s(t_{max})\, sin(\alpha) = \frac{v_o^2}{2\,g}\,\frac{tan(\alpha)}{tan(\alpha)+\mu}$ e $\frac{tan(\alpha)}{tan(\alpha)+\mu}$ é sempre menor que 1 excepto para $\alpha = \pi/2$.

2- c) (1 val.) Assumindo que o objecto volta a descer depois de atingir a distância máxima sobre a rampa com α_{max}, determine o tempo que leva a descer de volta à posição inicial, e qual a velocidade $\vec{v}_1$ nesse ponto.

- Em geral a equação do movimento a descer, agora com $\vec{F}_a = \mu\, mg\;cos(\alpha)\,\vec{e}_{||}$, partindo do repouso do ponto à distância máxima $s(t_{max})$ da origem.

$$s(t) = s(t_{max}) - \frac{1}{2}\,g(sin(\alpha) - \mu\,cos(\alpha))\,t^2 \tag{2.11}$$

- Para estar de volta ao ponto inicial $s(t_1) = 0$ ao fim de um tempo t_1 é necessário que

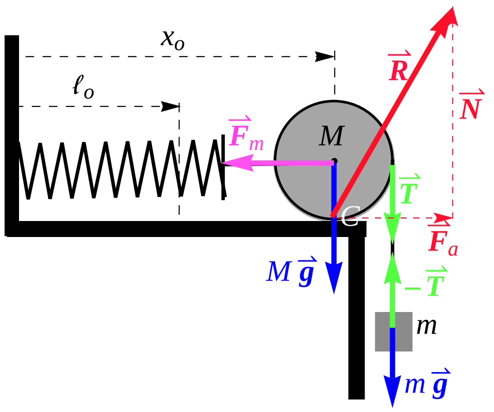
$$0 = s(t_{max}) - \frac{1}{2}\,g(sin(\alpha) - \mu\,cos(\alpha))\,t_1^2 \quad\Rightarrow\quad t_1 = \sqrt{\frac{2\,s(t_{max})}{g\,(sin(\alpha)-\mu\,cos(\alpha))}} = \frac{v_o}{g}\,\frac{1}{\sqrt{sin(\alpha)^2-\mu^2\,cos(\alpha)^2}} \tag{2.12}$$

$$s'(t) = -g(sin(\alpha) - \mu\,cos(\alpha))\,t \qquad\Rightarrow\quad \vec{v}_1 = s'(t_1)\,\vec{e}_{||} = -\sqrt{\frac{sin(\alpha)-\mu\,cos(\alpha)}{sin(\alpha)+\mu\,cos(\alpha)}}\;\vec{v}_o \tag{2.13}$$

- Quando $\alpha_{max} = \pi/2$, temos $t_1 = \frac{v_o}{g}$ e $\vec{v}_1 = -\vec{v}_o$, mas quando $\alpha_{max} = 0$ a massa não volta para trás e tanto t_1 como $\vec{v}_1$ são imaginários.

---

3. Um cilindro homogéneo de raio R, massa M e comprimento H pode rolar sem deslizar sobre uma superfície plana. Ao eixo do cilindro está ligada uma mola de constante elástica k, comprimento natural ℓ_o e massa desprezável. Inicialmente uma massa m está pendurada dum fio preso à periferia do cilindro com indica a figura.



3- a) (2 val.) Faça um diagrama das diversas forças $\vec{F}_i$ aplicadas ao cilindro e à massa m, na situação em que o sistema está em equilíbrio. Explique porque é que se não existisse uma componente de atrito no ponto de contacto C o sistema não poderia estar em equilíbrio qualquer que fosse a massa m.

- Em equilíbrio as forças actuando no cilindro verificam $\vec{F}_m + M\,\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = 0$ e na massa m verificam $-\vec{T} + m\,\vec{g} = 0$.
- Se $\vec{R} = \vec{N}$ apenas então $M\,\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = 0$ e $M\,\vec{a} = \vec{F}_m + M\,\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \equiv \vec{F}_m \neq 0$ necessáriamente e o cilindro acelerava, escorregando no sentido de $\vec{F}_m$.

(2 val.) Calcule o momento $\vec{M}_C^{(i)} = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_C\right)\times\vec{F}_i$ das forças $\vec{F}_i$, aplicadas nas posições $\vec{r}_i$, relativamente ao ponto de contacto C e deduza a respectiva equação dos momentos no equilíbrio. Determine a partir desta o valor da massa m que mantém o sistema em equilíbrio para um dado valor de x_o.

$$\begin{cases} \vec{M}_C(F_m) &= R\,k\,(x_o - \ell_o)\,\vec{e}_z \\ \vec{M}_C(T) &= -R\,m\,g\,\vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{M}_C(Mg) &= 0 \quad porque\,\vec{r}_{cm} - \vec{r}_C \parallel M\,\vec{g}. \\ \vec{M}_C(R) &= 0 \quad porque\,\vec{R}\,etsá\;aplicada\;em\,C. \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C(F_m) + \vec{M}_C(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{k\,(x_o - \ell_o)}{g} \tag{3.15}$$

3- c) (1 val.) A partir da equação de equilíbrio das forças aplicadas determine as componentes normal $\vec{N}$ e de atrito $\vec{F}_a$ da reacção $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_a$ do plano no ponto C. Calcule de seguida o valor mínimo do coeficiente de atrito estático μ_e que torna possível o equilíbrio do sistema, sabendo que $|\vec{F}_a| \leq \mu_e\,|\vec{N}|$.

- No equilíbrio a soma vectorial das forças aplicadas em cada corpo deve ser nula pelo que $\vec{T} = m\,\vec{g}$. Escrevendo $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_a$ e decompondo em direcções ortogonais obtém-se :

$$\begin{cases} \vec{F}_a &= -\vec{F}_m &= k\,(x_o - \ell_o)\,\vec{e}_x \\ \vec{N} &= -M\,\vec{g} - \vec{T} &= -(M+m)\,\vec{g} \end{cases} \tag{3.16}$$

$$|\vec{F}_a| \leq \mu_e\,|\vec{N}| \quad \Rightarrow \quad k(x_o - \ell_o) \leq \mu_e(M+m)\,g \quad \Leftrightarrow \quad \mu_e \geq \frac{k\,(x_o - \ell_o)}{(M+m)\,g} = \frac{1}{1 + \frac{M\,g}{k\,(x_o - \ell_o)}} \tag{3.17}$$

4.

4- a) (2 val.) Um pequeno bloco pesando 40 N gira, sem atrito, apoiado numa mesa e preso por uma corda que passa por um orifício da mesa. O bloco descreve um círculo de raio 0.5 m, em torno do orifício, com uma velocidade inicial de 3 $\frac{m}{s}$. A corda é então puxada lentamente através do orifício, diminuindo o raio do círculo descrito pelo bloco. Sabendo que a corda aguenta até 200 N de tensão antes de romper, determine o raio do círculo quando a corda parte.

- A única força causando aceleração é a tensão no fio $\vec{T} = -m\,r\,\omega^2\,\vec{e}_r$ e é radial, por isso $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r}\times\vec{T} = 0$ e conserva-se assim o momento angular $\vec{L}_o = \vec{r}\times\vec{p} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$ em relação à origem (o orifício por onde passa a corda) o que permite determinar as velocidades para cada raio r. Para trajectórias circulares $\vec{r} \perp \vec{v}$ pelo que

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,r_o\,v_o = m\,r\,v \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v = \frac{r_o}{r}\,v_o = r\,\omega \\ \omega = \frac{r_o}{r^2}\,v_o \end{cases} \tag{4.18}$$

$$|\vec{T}|_{max} = m\,r_{min}\,\omega_{max}^2 = 200\,N \quad \Rightarrow \quad m\,r_{min}\left(\frac{r_o}{r_{min}^2}\,v_o\right)^2 = T_{max} \quad \Leftrightarrow \quad r_{min} = \left(\frac{m\,r_o^2\,v_o^2}{T_{max}}\right)^{1/3} = 0.358\,m \tag{4.19}$$

(2 val.) Um peão P parado à beira de uma estrada ouve a buzina emitida com uma frequência $f_o = 2\,kHz$ de um carro que passa perto dele com uma velocidade constante v_c. A razão entre as frequências f_+ e f_- ouvidas pelo peão antes e depois do carro passar por ele é $f_+/f_- = 1/2$. Assumindo que o som se propaga com uma velocidade $v_s = 345\,m/s$ no ar, determine a velocidade v_c com que o carro se desloca e as frequências ouvidas f_+ e f_-.

$$f_+ = \frac{v_S}{v_S + v_C} f_O \quad ; \quad f_- = \frac{v_S}{v_S - v_C} f_O \quad \Rightarrow \quad \frac{f_+}{f_-} = \frac{1}{2} = \frac{v_S - v_C}{v_S + v_C} \tag{4.20}$$

$$v_C = \frac{v_S}{3} = 115 \, \frac{m}{s} \quad ; \quad f_+ = 1.5\,kHz \quad ; \quad f_- = 3.0\,kHz \tag{4.21}$$

4- c) (1 val.) Se o som da buzina da alínea anterior for uma onda harmónica do tipo $y(x,\ t) = y_o\, sin(k\,x \pm \omega\, t)$ como escreveria a expressão para as ondas sonoras $y(x,\ t)$ quando o carro se aproxima e quando se afasta? Use valores concretos para $k,\ \omega$ em ambos os casos. Qual é a diferença entre os comprimentos de ondas antes e depois do carro passar por P?

$$\begin{cases} y_-(x,\ t) = y_O\, sin(k_-\, x - \omega_-\, t) \quad a\ aproximar - se \begin{cases} \omega_- = 2\pi f_- &= 6\pi \times 10^3\ \frac{rad}{s} \\ k_- = \frac{\omega_-}{v_S} &= 54.6\ m^{-1} \end{cases} \\ y_+(x,\ t) = y_O\, sin(k_+\, x + \omega_+\, t) \quad a\ afastar - se \begin{cases} \omega_+ = 2\pi f_+ &= 3\pi \times 10^3\ \frac{rad}{s} \\ k_+ = \frac{\omega_+}{v_S} &= 27.3\ m^{-1} \end{cases} \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\lambda_+ - \lambda_- = \frac{2\pi}{k_+} - \frac{2\pi}{k_-} = 0.115\ m \tag{4.23}$$

- **NB:** Efeito de Doppler (v_e velocidade de emissor, v_r velocidade do receptor, v_s velocidade do som): $f' = \frac{v_s - v_r}{v_s - v_e} f_o$