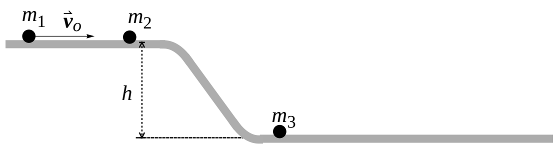
1º Exame de Mecânica e Ondas

(LEMat, LQ, MEBiol, MEAmbi, MEQ)

Quar 09:00 - 11:30
23 de Junho 2010

1. Três objectos de massas $m_1 = m_2 = m$ e $m_3 = 4\,m$ deslizam sem atrito numa superfície como indicado na figura. Assumindo que apenas o primeiro se desloca com velocidade $\vec{v}_o = \frac{1}{3}\sqrt{2\,g\,h}$, enquanto os outros estão inicialmente em repouso, determine justificando as suas respostas:



1- a) (1 val.) Quais as velocidades finais das massas assumindo que todas as colisões são completamente inelásticas. Qual é a variação da energia mecânica total do conjunto? (Explique o resultado.)

- Primeira colisão (Conservação de Momento Linear - CML)

$$m_1\,\vec{v}_o = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v}_o = \frac{1}{2}\,\vec{v}_o \tag{1.1}$$

- Rampa (Conservação de Energia Mecânica - CEM)

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_2^2 + (m_1 + m_2)\,g\,h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,u_o^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2^2 + 2\,g\,h = u_o^2 \tag{1.2}$$

$$\vec{u}_o = \vec{v}_2\sqrt{1 + \frac{2\,g\,h}{{v_2}^2}} = \frac{1}{2}\,\vec{v}_o\sqrt{1 + \frac{8\,g\,h}{{v_o}^2}} = \frac{\sqrt{37}}{2}\,\vec{v}_o \tag{1.3}$$

- Segunda colisão (CML)

$$(m_1 + m_2)\,\vec{u}_o = \left(m_1 + m_2 + m_3\right)\vec{u}_3 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}_3 = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}\,\vec{u}_o = \frac{\sqrt{37}}{6}\,\vec{v}_o \tag{1.4}$$

- Energia dissipada na ligação entre as massas $\Delta E = E_f - E_i = -\frac{77}{54}\,m\,g\,h$

$$E_i = \frac{1}{2}\,m_1\,v_o^2 + (m_1 + m_2)\,g\,h = \frac{19}{9}\,m\,g\,h \tag{1.5}$$

$$E_f = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_3\right)u_3^2 = \frac{1}{12}\,m\,v_o^2\left(\frac{8\,g\,h}{v_o^2} + 1\right) = \frac{37}{54}\,m\,g\,h \tag{1.6}$$

1- b) (2 val.) Assumindo agora que as colisões são completamente elásticas, quais são as velocidades das massas após a colisão de m_1 com m_2 e seguidamente de m_2 com m_3.

- Conservação do momento linear (CML):

$$m_1\,\vec{v}_o = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1\left(\vec{v}_o - \vec{v}_1\right) = m_2\,\vec{v}_2 \tag{1.7}$$

- Conservação da energia cinética (CEC)

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v_o^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1\left(\vec{v}_o - \vec{v}_1\right)\cdot\left(\vec{v}_o + \vec{v}_1\right) = m_2\,\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 \tag{1.8}$$

- Substituindo (CML) em (CEC) elimina-se $m_2\,\vec{v}_2$ desta equação ficando

$$\begin{cases} \vec{v}_o - \vec{v}_1 &= \dfrac{m_2}{m_1}\,\vec{v}_2 \\ \vec{v}_o + \vec{v}_1 &= \vec{v}_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{v}_1 &= \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_o \\ \vec{v}_2 &= 2\,\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_o \end{cases} \tag{1.9}$$

- Primeira colisão m_1 com $m_2 = m_1$: $\begin{cases} \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_o \end{cases}$

- Velocidade de m_2 depois de descer a rampa (CEM):

$$v_2^2 + 2\,g\,h = u_o^2 \quad \implies \quad \vec{u}_o = \vec{v}_2\,\sqrt{1 + \frac{2\,g\,h}{v_2^2}} = \sqrt{10}\;\vec{v}_o \tag{1.10}$$

- Segunda colisão m_2 com $m_3 = 4\,m_2$: $\begin{cases} \vec{u}_2 &= \left(\dfrac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)\vec{u}_o &= -\dfrac{3}{5}\sqrt{10}\;\vec{v}_o \\ \vec{u}_3 &= 2\,\dfrac{m_2}{m_2 + m_3}\,\vec{u}_o &= \dfrac{2}{5}\sqrt{10}\;\vec{v}_o \end{cases}$

1- c) (1 val.) Se a massa m_2 voltar para trás, qual é a altura z que consegue atingir quando volta a subir a rampa?

- Subida da rampa: m_2 com velocidade $\vec{u}_2 = -\frac{3}{5}\sqrt{10}\;\vec{v}_o$ e (CEM)

$$m_2\,g\,z = \frac{1}{2}\,m_2\,u_2^2 \qquad \implies \quad z = \frac{1}{2}\,\frac{u_2^2}{g} = \frac{2}{5}\,h \tag{1.11}$$

1- d) (1 val.) Haverá mais colisões depois da segunda? Se sim indique quantas e quais as velocidades resultantes das massas?

- A massa m_2 volta ao plano e apanha m_3 com velocidade $\vec{w}_o = -\vec{u}_2 = \frac{3}{5}\sqrt{10}\;\vec{v}_o$. Usando (CML) para eliminar $m_3(\vec{w}_3 - \vec{u}_3)$ de (CEC) obtém-se

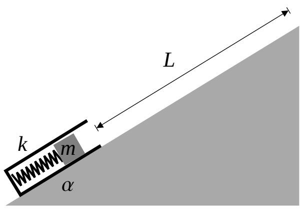
$$\begin{cases} m_2(\vec{w}_o - \vec{w}_2) &= m_3(\vec{w}_3 - \vec{u}_3) \\ m_2(\vec{w}_o - \vec{w}_2)\cdot(\vec{w}_o + \vec{w}_2) &= m_3(\vec{w}_3 - \vec{u}_3)\cdot(\vec{w}_3 + \vec{u}_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{w}_o - \vec{w}_2 &= \dfrac{m_3}{m_2}\,(\vec{w}_3 - \vec{u}_3) \\ \vec{w}_o + \vec{w}_2 &= \vec{w}_3 + \vec{u}_3 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \vec{w}_2 &= \dfrac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\,\vec{w}_o + \dfrac{2\,m_3}{m_2 + m_3}\,\vec{u}_3 \\ \vec{w}_3 &= \dfrac{2\,m_2}{m_2 + m_3}\,\vec{w}_o - \dfrac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\,\vec{u}_3 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{w}_2 &= \dfrac{7}{5}\sqrt{2/5}\;\vec{v}_o \\ \vec{w}_3 &= \dfrac{12}{5}\sqrt{2/5}\;\vec{v}_o \end{cases} \tag{1.13}$$

- Uma vez que a velocidade da massa m_2 é menor que a de m_3 não haverá mais colisões.

---

2. Um objecto de massa m é disparado numa rampa com inclinação α por canhão com mola de constante k. Assuma inicialmente que não existe atrito na rampa e que o movimento se dá no campo gravítico à superfície da Terra. Se a partir do ponto em que se separa da mola a massa m percorre uma distância L sobre a rampa determine:



2- a) (1 val.) A compressão mínima da mola $\Delta\ell_{min}$ que é necessária inicialmente para que a massa m salte da rampa quando disparada.

- Para que a massa salte da rampa no ponto A só é necessário que lá chegue com velocidade nula. Sendo lançada do repouso, por (CEM)

$$E_o = \frac{1}{2}\,k\,\Delta\ell_{min}^2 - m\,g\,\Delta\ell_{min}\,sin(\alpha) = m\,g\,L\,sin(\alpha) = E_A \tag{2.14}$$

$$\Delta\ell_{min} = \frac{m\,g\;sin(\alpha)}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,k\,L}{m\,g\;sin(\alpha)}}\right) \tag{2.15}$$

2- b) (2 val.) A velocidade de saída da rampa v_o e altura máxima h acima da rampa a que a massa m chega quando a compressão inicial da mola é $\Delta\ell > \Delta\ell_{min}$.

- Se a massa m chega a A com uma velocidade $\vec{v}_o$

$$E_o = \frac{1}{2}\,k\,\Delta\ell^2 - m\,g\;\Delta\ell\,sin(\alpha) = \frac{1}{2}\,m\,v_o^2 + m\,g\,L\,sin(\alpha) = E_A \tag{2.16}$$

$$v_o^2 = \frac{k\,\Delta\ell^2}{m} - 2\,g\,(L + \Delta\ell)\,sin(\alpha) \tag{2.17}$$

- No ponto mais alto da trajectória a massa tem velocidade horizontal igual a $v_o\,cos(\alpha)$, pelo que por (CEM) a partir do ponto A,

$$\frac{1}{2}\,m\,v_o^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m\,(v_o\,cos(\alpha))^2 + m\,g\,h \tag{2.18}$$

$$h = \frac{v_o^2}{2\,g}\,sin^2(\alpha) \;=\; \frac{k}{2\,m\,g}\,\Delta\ell^2\,sin^2(\alpha) - (L + \Delta\ell)\,sin^3(\alpha) \tag{2.19}$$

2- c) (2 val.) Se agora considerarmos que existe atrito na rampa com coeficiente dinâmico μ, qual é o trabalho realizado por cada uma das forças que actuam na massa m até à saída da rampa nas mesmas condições iniciais? Qual deve ser a energia cinética à saída da rampa?

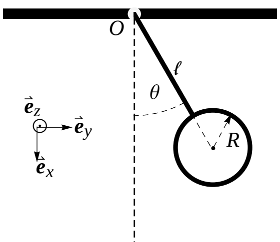
- A força de atrito é $\vec{F}_a = -\mu\;m\,g\,cos(\alpha)\,\frac{\vec{v}}{v}$ paralela à rampa e oposta à velocidade $\vec{v}$. As componentes perpendiculares à rampa da forças aplicadas não realizam trabalho. Para a força da mola, o trabalho realizado é o negativo da variação da sua energia potencial.

$$W_a = -\mu\,m\,g\,L\,cos(\alpha) \quad ; \quad W_g = -m\,g\,sin(\alpha)\,(L + \Delta\ell) \quad ; \quad W_m = \frac{1}{2}\,k\,\Delta\ell^2 \tag{2.20}$$

- Teorema trabalho energia: $W_{tot} = \frac{1}{2}\,k\,\Delta\ell^2 - m\,g\,sin(\alpha)\,(L + \Delta\ell) - \mu\,m\,g\,L\,cos(\alpha) = \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 = EC_A$

---

3. Um pêndulo físico é constituído por uma barra fina de massa $m = 4\,M$ e comprimento $\ell = 3\,R$ presa numa extremidade O a um eixo de rotação sem atrito, e na outra a um anel homogéneo de raio R e massa M, como indicado na figura.



3- a) (2 val.) Mostre que o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação em O é $\mathcal{I}_O(barra) = 12\, M\, R^2$ e que o momento de inércia do anel em relação ao mesmo eixo é $\mathcal{I}_O(anel) = 17\, M\, R^2$. Determine a distância d_{cm} entre o eixo de rotação em O e o centro de massa do pêndulo.

$$\mathcal{I}_O(barra) = \int_0^{3R} s^2\, \frac{dm}{ds}\, ds = \frac{4M}{3R} \int_0^{3R} s^2\, ds = 12\, M\, R^2 \tag{3.21}$$

- Teorema de eixos paralelos com $\mathcal{I}_{cm}(anel) = \int_M R^2\, dm = M\, R^2$

$$\mathcal{I}_O(anel) = \mathcal{I}_{cm}(anel) + M\,(\ell + R)^2 = M\, R^2 + M\,(3\,R + R)^2 = 17\, M\, R^2 \tag{3.22}$$

$$d_{cm} == \frac{m\,\frac{\ell}{2} + M\,(\ell + R)}{m + M} = 2\,R \tag{3.23}$$

3- b) (2 val.) A partir da equação que relaciona o momento angular $\vec{L}_O$ com os momentos de forças aplicadas $\vec{N}_O$ deduza a equação de movimento para o pêndulo em função do momento de inércia total $\mathcal{I}_O$. Para pequenas oscilações (aquelas em que $sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$) determine a frequência de oscilação natural ω_o e o respectivo período T.

$$\vec{N}_O = \left(\vec{R}_{cm} - \vec{r}_O\right) \times (m + M)\,\vec{g} = -5\, M\, g\, d_{cm}\, sin(\theta)\, \vec{e}_z = -10\, R\, M\, g\, sin(\theta)\, \vec{e}_z \tag{3.24}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{I}_O\, \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N}_O \tag{3.25}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\, \vec{e}_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{10\, R\, M\, g\, sin(\theta)}{\mathcal{I}_O} = -\frac{10\, g}{29\, R}\, sin(\theta) \approx -\frac{10\, g}{29\, R}\, \theta \;=\; -\omega_o^2\, \theta \tag{3.26}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{10}{29}\, \frac{g}{R}} = \frac{2\,\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2\,\pi}\, \sqrt{\frac{29}{10}\, \frac{R}{g}} \tag{3.27}$$

3- c) (1 val.) Calcule a velocidade do centro de massa e a energia cinética do pêndulo quando passa na posição vertical, se ele for largado do repouso da posição em que $\theta = 45\,°$.

- Por conservação da energia mecânica, colocando o zero do potencial gravítico ao nível de O:

$$E_i = -5\, M\, g\, d_{cm}\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \;=\; E_v = \frac{1}{2}\, \mathcal{I}_O\, \omega^2 - 5\, M\, g\, d_{cm} \tag{3.28}$$

$$\omega^2 = \frac{10\, M\, d_{cm}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\mathcal{I}_O} = \frac{10\left(2 - \sqrt{2}\right)}{29\, R}\, g \quad \Longrightarrow \quad \vec{V}_{cm} = -d_{cm}\, \omega\, \vec{e}_y = -2\, \sqrt{R\, g\left(2 - \sqrt{2}\right) \frac{10}{29}}\; \vec{e}_y \tag{3.29}$$

---

4. Duas naves espaciais *Alpher* (α) e *Bethe* (β) deslocam-se em direcções opostas e na mesma rota. Quando *Alpher* passa junto à estação orbital *Gamow* (γ) um observador da estação mede velocidades de magnitude $|\vec{v}_\alpha| = 0.7\, c$ e $|\vec{v}_\beta| = 0.8\, c$ para as naves, e localiza *Bethe* uma distância $d = 100\,000\, Km$.

4- a) (1.0 val.) Qual é a velocidade com que *Bethe* se aproxima de *Alpher* vista pelo piloto desta?

- Usando $V = v_\alpha = 0.7\, c$ e $v_x = v_\beta = -0.8\, c$ obtemos

$$v_{\alpha\beta} = \frac{v_\beta - v_\alpha}{1 - v_\alpha\, v_\beta / c^2} = -0.961538\, c \tag{4.30}$$

4- b) (0.5 val.) Qual é a distância $d_{\alpha\beta}$ entre as naves que o piloto da nave *Alpher* mede no instante em que passa por *Gamow*?

- A transformada de Lorentz das coordenadas $x = d$, no instante $t = 0$, do referencial da estação *Gamow* para o referencial de *Alpher*, que se desloca com velocidade $V = v_\alpha$, localiza aí a nave *Bethe* na posição x' mas no instante $t' < 0$.

$$x'_o = \frac{1}{\sqrt{1-(v_\alpha/c)^2}}\, d = 140\,028\, Km \qquad ; \qquad t'_o = -\frac{1}{\sqrt{1-(v_\alpha/c)^2}}\,\frac{v_\alpha}{c^2}\, d = -0.3267\, s \tag{4.31}$$

- No instante $t' = 0$, a distância de *Bethe* a *Alpher* é neste referencial móvel

$$d_{\alpha\beta} = x'_o - v_{\alpha\beta}\, t'_o = 45\,778.4\, Km \tag{4.32}$$

4- c) (1.0 val.) Quanto tempo é que o observador em *Gamow* estima que as naves têm até se cruzarem, se mantivessem as mesmas velocidades? Quanto tempo é que o piloto de *Alpher* mede até se cruzar com *Bethe*?

- No referencial de *Gamow* $v_\alpha\, \delta t_\gamma - v_\beta\, \delta t_\gamma = d \qquad \Longrightarrow \qquad \delta t_\gamma = \frac{d}{v_\alpha - v_\beta} = 0.22\, s$

- Visto do referencial de *Alpher* $\delta t_\alpha = \sqrt{1-(v_\alpha/c)^2}\ \delta t_\gamma = \frac{d_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}} = 0.16\, s$

  - **NB:** Transformadas de Lorentz: $x' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}(x - V\,t)$; $t' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(t - \frac{V}{c^2}\,x\right)$; $v'_x = \frac{v_x - V}{1-\frac{v_x\, V}{c^2}}$

4- d) (1.0 val.) Um morcego voa com velocidade horizontal constante de 15 $\frac{Km}{h}$ em direcção a uma parede vertical de uma caverna. Assumindo que a velocidade do som na caverna é 340 $\frac{m}{s}$, qual a frequência do eco reflectido na parede que o morcego ouvirá se ele for capaz de emitir um som com frequência 60 kHz ?

$$f' = \frac{v_s + v_m}{v_s - v_m}\, f_o = 61.49\, kHz \tag{4.33}$$

4- e) (0.5 val.) Se o morcego detectar o eco 0.5 s depois de emitir o som, a que distância se encontra da parede?

- Se d é a distância do morcego à parede quando emite o som, o tempo $\delta t = 0.5\, s$ que leva a ouvir o eco é a soma do tempo δt_1 que o som leva a chegar à parede e o tempo δt_2 que o eco leva a chegar ao morcego

$$\delta t = \delta t_1 + \delta t_2 \quad com \begin{cases} \delta t_1 & = \frac{d}{v_s} \\ \delta t_2 & = \frac{d - v_m\, \delta t}{v_s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{v_m + v_s}{2}\,\delta t & = 86 \text{ m} \\ d' = d - v_m\, \delta t & = 84 \text{ m} \end{cases} \tag{4.34}$$

4- f) (1.0 val.) Se a onda sonora que o morcego emite for harmónica (i.e. do tipo $A\, sin(k\, x \pm \omega\, t)$) qual é:

i) A frequência angular ω.

ii) A velocidade de fase v.

iii) O número de ondas k.

iv) O comprimento de onda λ.

$$i)\ \omega = 2\pi\, f = 120\,\pi \times 10^3\, \frac{rad}{s} \quad ii)\ \ v = 340\, \frac{m}{s} \quad iii)\ \ k = \frac{\omega}{v} = \frac{6\pi}{17}\times 10^3\, m^{-1} \quad iv)\ \ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{17}{3}\times 10^{-3}\, m \tag{4.35}$$

- **NB:** Efeito de Doppler: $f' = \frac{v_s - v_r}{v_s - v_e}\, f_o$